Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Θέμα 1ο

Δίνονται οι σχέσεις, $|2z-1|=|z-2|$ (1),

$u\bar{u}=\left(u-\frac{(1+i)^{2015}}{2^{1005}}\right)\left(\bar{u}+\frac{(1+i\sqrt{3})^{9}}{128}-4i\right)$ (2) όπου $z,u\in\mathbb{C}$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z $M(z)$ που ικανοποιούν τη σχέση (1) είναι κύκλος με K(0,0), ρ=1.

β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του u $M(u)$ που ικανοποιούν τη σχέση (2) είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα $k_1(0,0)$, $k_2(4,-4)$ με εξίσωση $y=x-4$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\left(z-\frac{1}{z}\right)\in I$

δ) Να αποδείξετε ότι $|z-u|\geq 2\sqrt{2}-1$

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3(|z-u|-2\sqrt{2})+2x-1=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (0,1].

στ) Έστω μιγαδικοί z_1,z_2 που ικανοποιούν τη σχέση (1) με $\mathrm{Re}(z_1)>0$, $\mathrm{Re}(z_2)>0$ και $z_1z_2\notin\mathbb{R}$. Αν $w=\frac{z_1+z_2}{t+z_1z_2}\in\mathbb{R}$ να βρείτε το $t\in\mathbb{R}$.

Θέμα 2ο

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}+f'(x)+e^{-x}=0$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$f(x)\leq\frac{1}{e}=f(1)$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $f''(x)+f'(x)+e^{-x}=0,\ x\in\mathbb{R}$

ιι) $f(x)=\frac{x}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^2f(\alpha+1)\geq -1+e^2f(\alpha)$

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της g όταν $g(x)=xf(x)$

Απαντήσεις

Θέμα 1ο

α) Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$|2z-1|=|z-2| \Leftrightarrow |2z-1|^2=|z-2|^2 \Leftrightarrow$$

$$(2z-1)(2\bar{z}-1)=(z-2)(\bar{z}-2) \Leftrightarrow$$

$$4|z|^2-2z-2\bar{z}+1=|z|^2-2z-2\bar{z}+4 \Leftrightarrow 3|z|^2=3 \Leftrightarrow |z|=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z $M(z)$ είναι κύκλος κέντρου $K(0,0)$ και ακτίνας $\rho=1$.

β) Για την παράσταση $\dfrac{(1+i)^{2015}}{2^{1005}}$ έχουμε:

$$\frac{(1+i)^{2015}}{2^{1005}}=\frac{(1+i)^{2014}(1+i)}{2^{1005}}=\frac{\left((1+i)^2\right)^{1007}(1+i)}{2^{1005}}=\frac{(2i)^{1007}(1+i)}{2^{1005}}=$$

$$\frac{2^{1007}i^{1007}(1+i)}{2^{1005}}=4i^{1006}i(1+i)=4\left(i^2\right)^{503}(i-1)=-4(i-1)=4(1-i)$$

Για την παράσταση $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^9}{128}$ έχουμε:

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^9}{128}=\frac{\left((1+i\sqrt{3})^3\right)^3}{128}=\frac{\left(1+3i\sqrt{3}+3i^2\sqrt{3}^2+i^3\sqrt{3}^3\right)^3}{128}=$$

$$\frac{\left(1+3i\sqrt{3}-9-i3\sqrt{3}\right)^3}{128}=\frac{-8^3}{128}=-4$$

Άρα η σχέση (2) γίνεται:

$$u\bar{u}=\left(u-\frac{(1+i)^{2015}}{2^{1005}}\right)\left(\bar{u}+\frac{(1+i\sqrt{3})^9}{128}-4i\right) \Leftrightarrow u\bar{u}=\left(u-4(1-i)\right)\left(\bar{u}-4-4i\right) \Leftrightarrow$$

$$u\bar{u}=\left(u-4(1-i)\right)\left(\bar{u}-4(1+i)\right) \Leftrightarrow |u|^2=|u-4(1-i)|^2 \Leftrightarrow$$

$$|u|=|u-4+4i| \Leftrightarrow |u-(0+0i)|=|u-(4-4i)|$$

Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w $M(w)$ είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα $k_1(0,0)$ και $k_2(4,-4)$ την οποία και θα βρούμε:

έστω $u=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$

$$|u|=|u-4+4i| \Leftrightarrow |u|^2=|u-4+4i|^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2=(x-4)^2+(y+4)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2=x^2-8x+16+y^2+8y+16 \Leftrightarrow y=x-4$$

άρα $\varepsilon: y=x-4$ η ζητούμενη μεσοκάθετος.

γ) Έστω $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$ τότε

$$z - \frac{1}{z} = x + yi - \frac{1}{x + yi} = x + yi - \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

αλλά από ερώτημα (α) $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ άρα η παραπάνω σχέση γίνεται: $z - \frac{1}{z} = x + yi - \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = x + yi - (x - yi) = 2yi \Leftrightarrow$

$$\left(z - \frac{1}{z}\right) \in I$$

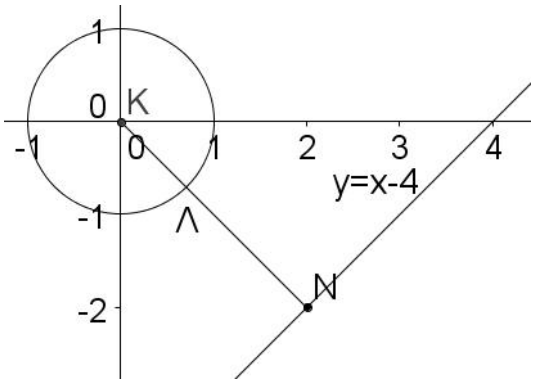
δ) Η ελάχιστη τιμή του $|z - u|$ θα ισούται με $(\Lambda N) = (KN) - \rho$

$$(KN) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|0 - 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Συνεπώς

$(\Lambda N) = (KN) - \rho = 2\sqrt{2} - 1$ και αφού είναι η ελάχιστη τιμή του $|z - u|$ θα ισχύει

$|z - u| \geq 2\sqrt{2} - 1$



ε) Έστω συνάρτηση $f(x) = x^3(|z - u| - 2\sqrt{2}) + 2x - 1,\ x \in \mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική.

$f(0) = -1 < 0,\ f(1) = |z - u| - 2\sqrt{2} + 1$

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$|z - u| \geq 2\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow |z - u| - 2\sqrt{2} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(1) \geq 0$

Συνεπώς $f(0)f(1) \leq 0$

Αν $f(0)f(1) < 0$ τότε ισχύει το Θεώρημα Bolzano, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

Αν $f(0)f(1) = 0$ τότε $f(1) = 0$ αφού $f(0) = -1 \neq 0$, άρα το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$

Άρα η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (0,1].

στ) $w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow w = \overline{w} \Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{t + z_1 z_2} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{t + \overline{z_1}\,\overline{z_2}} \Leftrightarrow$

$$z_1 t + z_2 t + |z_1|^2 \overline{z_2} + |z_2|^2 \overline{z_1} = \overline{z_1} t + \overline{z_2} t + |z_1|^2 z_2 + |z_2|^2 z_1 \Leftrightarrow$$

$$z_1 t + z_2 t + \overline{z_2} + \overline{z_1} = \overline{z_1} t + \overline{z_2} t + z_2 + z_1 \Leftrightarrow$$

$t\left(z_1+z_2-\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=z_1+z_2-\overline{z_1}-\overline{z_2}\Leftrightarrow$

$t(2y_1+2y_2)i=(2y_1+2y_2)i\Leftrightarrow t(y_1+y_2)=(y_1+y_2)$

Αν $y_1\neq -y_2$ τότε $t=1$

Έστω $y_1=-y_2$ τότε $z_1=x_1+y_1i,\ z_2=x_2-y_1i$ και επειδή ανήκουν στον κύκλο του ερωτήματος α) θα ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l}x_1^2+y_1^2=1\\ x_2^2+y_1^2=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow x_1^2=x_2^2\Leftrightarrow x_1=x_2 \text{ αφού } Re(z_1)>0,\ Re(z_2)>0$$

Άρα $z_1=x_1+y_1i,\ z_2=x_1-y_1i$ συνεπώς

$z_1z_2=(x_1+y_1i)(x_1-y_1i)=x_1^2+y_1^2=1\in\mathbb{R}$ άτοπο, γιατί από υπόθεση $z_1z_2\notin\mathbb{R}$. Άρα καταλήγουμε ότι $t=1$.

Θέμα 2ο

α) ι) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2f'(x+2h)-2f'(x+h)}{2h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2f''(x+2h)-f''(x+h)}{1}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\left(2f''(x+2h)-f''(x+h)\right)=f''(x)$ (αφού f'' συνεχής).

Άρα $f''(x)+f'(x)+e^{-x}=0,\ x\in\mathbb{R}$

ιι) $f''(x)+f'(x)+e^{-x}=0\Leftrightarrow\left(f'(x)+f(x)-e^{-x}\right)'=0$ επομένως από συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής $f'(x)+f(x)-e^{-x}=c$, (3)

Ισχύει από (2) $f(1)=\dfrac{1}{e}$ και $f(x)\leq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, άρα ισχύει το θεώρημα Fermat. Συνεπώς $f'(1)=0$

Για $x=1$ στην (3) έχουμε: $0+\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e}=c\Leftrightarrow c=0$ άρα

$f'(x)+f(x)-e^{-x}=0\Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf(x)-1=0\Leftrightarrow\left(e^xf(x)-x\right)'=0$

επομένως από συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής

$e^xf(x)-x=c_1$ (4)

Για $x=1$ στην (4) έχουμε: $e^1f(1)-1=c_1\Leftrightarrow e\dfrac{1}{e}-1=c_1\Leftrightarrow c_1=0$

Συνεπώς $e^x f(x) - x = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{e^x}, x \in \mathbb{R}$

β) $f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}, x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(-1-1+x)}{e^{2x}} = \frac{x-2}{e^x}\ x \in \mathbb{R}$

Είναι $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{e^x} > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Άρα η f κυρτή στο $[2, +\infty)$
και κοίλη στο $(-\infty, 2]$
Η f παρουσιάζει σημείο καμπής το $(2, f(2))$ ή $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ αφού αλλάζει η κυρτότητα εκατέρωθεν του $x_1 = 2$ και δέχεται εφαπτομένη στο $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ αφού είναι παραγωγίσιμη.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	0	+
f	∩		∪

γ) $e^2 f(\alpha+1) \geq -1 + e^2 f(\alpha) \Leftrightarrow e^2(f(\alpha+1) - f(\alpha)) \geq -1 \Leftrightarrow$

$f(\alpha+1) - f(\alpha) \geq -\frac{1}{e^2}$

Η f συνεχής στο $[\alpha, \alpha+1]$
Η f παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \alpha+1)$
οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \alpha+1)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi) = \frac{f(\alpha+1) - f(\alpha)}{\alpha + 1 - \alpha} = f(\alpha+1) - f(\alpha)$

Η f' παρουσιάζει στο $x_1 = 2$ ολικό ελάχιστο το $f'(2) = -\frac{1}{e^2}$ αφού η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ και αλλάζει η μονοτονία εκατέρωθεν του $x_1 = 2$ όπως φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	0	+
f'	↘		↗

Συνεπώς ισχύει $f'(x) \geq -\frac{1}{e^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η παραπάνω σχέση για $x = \xi$ δίνει

$f'(\xi) \geq -\frac{1}{e^2} \Leftrightarrow f(\alpha+1) - f(\alpha) \geq -\frac{1}{e^2}$

δ) $g(x)=xf(x)=x\frac{x}{e^x}=\frac{x^2}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\left(x\frac{1}{e^x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{-x}\right)=-\infty$$

άρα η C_g δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$ άρα η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν: Γ.Ανδρουλιδάκης, Μ.Βυνιχάκης, Α.Δουλγεράκης, Η.Μαργαρίτη, Μ.Μπαρμπούνη, Ζ.Μπομπότη, Π.Σιδερής, Α.Τσιλιφώνης.