ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	**Μαθηματικά Κατεύθυνσης**
ΣΕΙΡΑ:	
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	

Θέμα 1ο

Δίνονται οι σχέσεις: $|z|^2+5zi+3(11+zi^{2014})=\bar{z}(3+5i)$ $|w_1+w_2|=|w_1+iw_2|$, όπου $z,\ w_1,\ w_2\ \in\mathbb{C}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, είναι κύκλος κέντρου $K(3,5)$ και ακτίνας ρ=1.

β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w, $w=w_1\overline{w_2}$, είναι η ευθεία ε: $x-y=0$.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση των εικόνων του z από τις εικόνες του w, και τους μιγαδικούς για τους οποίους επιτυγχάνεται η ελάχιστη απόσταση.

δ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν μιγαδικοί z του γεωμετρικού τόπου του ερωτήματος α) τέτοιοι ώστε $z_1+z_2+z_3+\kappa+\lambda i=0$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ και $\kappa<\lambda$.

Θέμα 2ο

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}-e^x+x-2, & 0\le x<1\\ \dfrac{\ln^2 x}{2}+x-\ln x-e-2, & x\ge 1\end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την $\ln^2(x^2+2)-\ln^2(x^4+2)+2x^2<2\ln\left(\dfrac{x^2+2}{x^4+2}\right)+2x^4$.

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_{2014}^{x} f(t)dt+xf(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2014)$.

Θέμα 3ο

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $T:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: η f' είναι συνεχής, g συνεχής, $\int_0^{-x}\frac{f'(x+t)}{e^t}dt=-xe^x$, $f\left(\int_0^1 f(t)dt-e+1\right)=e^{-1}-1$, $g^2(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2$, $T(x)=\int_1^x g(t)dt$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-1$.

β) Να αποδείξετε ότι η g διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ και να βρεθούν οι πιθανοί τύποι της g.

γ) Αν $g(x)=\frac{e^x-1}{x}$, $x\neq 0$ να αποδείξετε:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}T(x)=+\infty$

ii) η εξίσωση $g(x)=\int_{x_0}^{x_0+1}g(t)dt$ έχει λύση για κάθε $x_0>0$.

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν:
Γ.Ανδρουλιδάκης, Μ.Βυνιχάκης, Α.Δουλγεράκης, Η.Μαργαρίτη, Μ.Μπαρμπούνη, Α.Τσιλιφώνης.