Λύσεις

Θέμα 1ο

α) Θεωρούμε συνάρτηση $f(x)=x^2|2z-1|-2x|z-2|$, $x\in\mathbb{R}$.

Από την υπόθεση έχουμε:

$x^2|2z-1|-2x|z-2|\geq|2z-1|-2|z-2|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ συνεπώς

$f(x)\geq|2z-1|-2|z-2|\Leftrightarrow f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f παρουσιάζει για $x=1$ ακρότατο.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$ ως πολυωνυμική, το $x=1$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x=1$, άρα ισχύει το Θεώρημα Fermat δηλαδή $f'(1)=0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$f'(x)=2x|2z-1|-2|z-2|$

$f'(1)=0\Leftrightarrow 2|2z-1|-2|z-2|=0\Leftrightarrow|2z-1|=|z-2|$

Έστω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ τότε από την παραπάνω σχέση έχουμε:

$|2z-1|=|z-2|\Leftrightarrow|2x-1+2yi|=|x-2+yi|\Leftrightarrow$

$\sqrt{(2x-1)^2+(2y)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}\Leftrightarrow 4x^2-4x+1+4y^2=x^2-4x+4+y^2\Leftrightarrow$

$x^2+y^2=1$

Συνεπώς οι εικόνες του z, M(z) ανήκουν σε κύκλο κέντρου O(0,0) και ακτίνας ρ=1.

β) Έστω $w=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ τότε από την υπόθεση έχουμε:

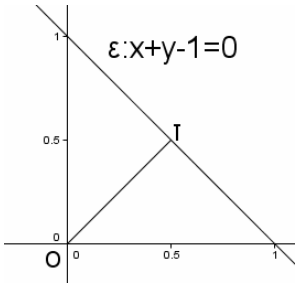
$w+\overline{w}i=\frac{1}{v}+vi\Leftrightarrow x+yi+(x-yi)i=\frac{1}{v}+vi\Leftrightarrow$

$(x+y)+i(x+y)=\frac{1}{v}+vi\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\frac{1}{v}\\x+y=v\end{cases}$

με πολλαπλασιασμό κατά μέλη προκύπτει: $(x+y)^2=1\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-1\\ \text{ή}\\x+y=1\end{cases}$

η $x+y=-1$ απορρίπτεται αφού $x+y=v>0$ άρα οι εικόνες M(w) του μιγαδικού w είναι σημεία της ευθείας ε: $x+y-1=0$

γ) Θα ισχύει: $|w| \geq (OT)$ όμως



$(OT) = \dfrac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ συνεπώς

$|w| \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{|w|} \leq \sqrt{2}$

Τότε: $\left|\dfrac{1}{w} - z\right| \leq \dfrac{1}{|w|} + |z| \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{w} - z\right| \leq \sqrt{2}+1.$

δ) Από ερώτημα α) έχουμε $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$

$u_1 + u_2 z + u_3 z^2 = 0 \Leftrightarrow \overline{u_1 + u_2 z + u_3 z^2} = 0 \Leftrightarrow \bar{u}_1 + \bar{u}_2 \bar{z} + \bar{u}_3 \bar{z}^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\bar{u}_1 + \bar{u}_2 \dfrac{1}{z} + \bar{u}_3 \dfrac{1}{z^2} = 0 \Leftrightarrow z^2 \bar{u}_1 + z\bar{u}_2 + \bar{u}_3 = 0.$

ε) Από την σχέση $u_1 + u_2 z + u_3 z^2 = 0$ και αφού $|z| = 1$ έχουμε:

$u_1 + u_2 z + u_3 z^2 = 0 \Leftrightarrow \bar{z}u_1 + u_2 z\bar{z} + u_3 \bar{z}z^2 = 0 \Leftrightarrow \bar{z}u_1 + u_2 + u_3 z = 0 \Leftrightarrow$

$u_2 = -\bar{z}u_1 - u_3 z$. Τότε

$|\bar{u}_3 u_2 - \bar{u}_2 u_1| = |\bar{u}_3(-\bar{z}u_1 - u_3 z) - (-z\bar{u}_1 - \bar{u}_3 \bar{z})u_1| =$

$\left|-\bar{u}_3 \bar{z} u_1 - z|u_3|^2 + z|u_1|^2 + \bar{u}_3 \bar{z} u_1\right| = \left|z\left(|u_1|^2 - |u_3|^2\right)\right| = \left||u_1|^2 - |u_3|^2\right|$

Θέμα 2ο

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο και άθροισμα παραγωγίσιμων με $f'(x) = 2x\ln x + x + \dfrac{1}{x} - x = 2x\ln x + \dfrac{1}{x}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο και άθροισμα και πηλίκο παραγωγίσιμων με $f''(x) = 2\ln x + 2 - \dfrac{1}{x^2}$.

Η f'' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο, άθροισμα και πηλίκο παραγωγίσιμων με $f'''(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^3} > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ άρα η f'' είναι

φροντιστήρια πουκαμισάς

γνησίως αύξουσα. $\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\ln x + 2 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ άρα υπάρχει

$x_1 > 0$ "κοντά" στο 0 τέτοιο ώστε $f''(x_1) < 0$. $f''(1) = 2\ln 1 + 2 - \frac{1}{1^2} = 1 > 0$.

Η f'' είναι συνεχής στο $[x_1, 1]$ ως γινόμενο, άθροισμα και πηλίκο συνεχών, $f''(x_1)''f(1) < 0$ άρα ισχύει το Θεώρημα Bolzano, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, 1) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$. Το x_0 μοναδικό αφού f'' είναι γνησίως αύξουσα άρα και "1-1".

β) Για κάθε

$x > x_0 \overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x) > 0$

$0 < x < x_0 \overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x) < 0$

x	0		x_0		$+\infty$
f''		$-$		$+$	
f'		$\searrow$		$\nearrow$	

Αφού η f' συνεχής στο $(0,+\infty)$ και σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα η f' παρουσιάζει για x_0 ολικό ελάχιστο το $f'(x_0) = 2x_0\ln x_0 + \frac{1}{x_0}$. Ισχύει

$f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x_0 + 2 - \frac{1}{x_0^2} = 0$.

Από τις δυο προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

$f'(x_0) = 2x_0\ln x_0 + \frac{1}{x_0} = x_0\left(\frac{1}{x_0^2} - 2\right) + \frac{1}{x_0} = \frac{2}{x_0} - 2x_0 = 2\left(\frac{1 - x_0^2}{x_0^2}\right) > 0$ αφού $x_0 \in (x_1, 1) \subseteq (0,1)$.

Άρα $f'(x) \geq f'(x_0) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

γ) Το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι $E = \int_0^{f(e)} \left|f^{-1}(x)\right| dx$. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο τιμών της f^{-1} άρα $f^{-1}(x) > 0$. Άρα

$E = \int_0^{f(e)} \left|f^{-1}(x)\right| dx = \int_0^{f(e)} f^{-1}(x)dx$ Θέτουμε $x = f(\omega)$ $\begin{cases} x = 0 \Leftrightarrow \omega = 1 \\ x = f(e) \Leftrightarrow \omega = e \\ dx = f'(\omega)d\omega \end{cases}$

φροντιστήρια πουκαμισάς

$$E=\int_1^e f^{-1}(f(\omega))f'(\omega)d\omega=\int_1^e \omega\left(2\omega\ln\omega+\frac{1}{\omega}\right)d\omega=\int_1^e (2\omega^2\ln\omega+1)d\omega=$$

$$\left[\frac{2\omega^3}{3}\ln\omega\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{2}{3}\omega^2\right)d\omega+[\omega]_1^e=\frac{2e^3}{3}-\frac{2e^3}{9}+\frac{2}{9}+e-1=\frac{4e^3+9e-7}{9}$$

Θέμα 3ο

α) Στο ολοκλήρωμα $\int_{x+1}^{2x}(u-x)\ln(u-x)du$ για $t=u-x$ έχουμε:

$$t=u-x\begin{cases}u=x+1\Leftrightarrow t=1\\ u=2x\Leftrightarrow t=x\\ du=dt\end{cases}\quad \text{συνεπώς}\quad \int_{x+1}^{2x}(u-x)\ln(u-x)du=\int_1^x t\ln t\,dt$$

Τότε έχουμε: $f(x)+\dfrac{f'(x)}{e^x}=\dfrac{\int_{x+1}^{2x}e^x(u-x)\ln(u-x)du+x\ln x}{e^x}\Leftrightarrow$

$$f(x)+\frac{f'(x)}{e^x}=\frac{e^x\int_1^x t\ln t\,dt+x\ln x}{e^x}\Leftrightarrow$$

$$e^xf(x)+f'(x)=e^x\int_1^x t\ln t\,dt+\left(\int_1^x t\ln t\,dt\right)'\Leftrightarrow$$

$$e^{e^x}e^xf(x)+e^{e^x}f'(x)=e^{e^x}e^x\int_1^x t\ln(t)dt+e^{e^x}\left(\int_1^x t\ln t\,dt\right)'\Leftrightarrow$$

$\left(e^{e^x}f(x)\right)'=\left(e^{e^x}\int_1^x t\ln t\,dt\right)'$ και από Θεώρημα Συνεπειών

Θεωρήματος Μέσης Τιμής $e^{e^x}f(x)=e^{e^x}\int_1^x t\ln t\,dt+c.$

Για $x=1$ $e^ef(1)=e^{e^1}\int_1^1 t\ln t\,dt+c\Leftrightarrow c=0$

φροντιστήρια πουκαμισάς

άρα $e^{e^x} f(x) = e^{e^x} \int_1^x t\ln t\,dt \Leftrightarrow f(x) = \int_1^x t\ln t\,dt$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

β) Η $g(t) = t\ln t$ είναι συνεχής, άρα η $f(x) = \int_1^x t\ln t\,dt$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (0,+\infty)$ με $f'(x) = x\ln x$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x\ln x > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	0	1	$+\infty$
f′	−		+
f	↘		↗

Αφού η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και σύμφωνα με το διπλανό πίνακα θα ισχύουν:
η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$,
η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων με

$f''(x) = \ln x + 1$, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$

Αφού η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και σύμφωνα με το διπλανό πίνακα θα ισχύουν: η f είναι κοίλη στο $(0,1/e]$,
η f είναι κυρτή στο $[1/e,+\infty)$.

x	0	$1/e$	$+\infty$
f″	−		+
f	∩		∪

γ) Η εφαπτομένη της f στο σημείο της $A(e,f(e))$ δίνεται από τον τύπο: $y - f(e) = f'(e)(x-e)$

$$f(e) = \int_1^e t\ln t\,dt = \int_1^e \left(\frac{t^2}{2}\right)' \ln t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}dt =$$

$$\frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{t}{2}dt =$$

$$\frac{e^2}{2} - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

$f'(e) = e$ άρα $y - \frac{e^2+1}{4} = e(x-e) \Leftrightarrow y = ex + \frac{1-3e^2}{4}$

Επειδή η f κυρτή στο $[1/e,+\infty)$ και η $y = ex + \frac{1-3e^2}{4}$ εφαπτομένη

θα ισχύει: $f(x) \geq ex + \frac{1-3e^2}{4} \Leftrightarrow \int_1^x t\ln t\,dt \geq ex + \frac{1-3e^2}{4}$, $x > \frac{1}{e}$.

δ) $\alpha^2+3\in[1,+\infty]$, $\alpha^2+1\in[1,+\infty]$ και $\alpha^2+1<\alpha^2+3$ συνεπώς

$\alpha^2+1<\alpha^2+3 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha^2+1)<f(\alpha^2+3)$

Θεωρούμε συνάρτηση $w(x)=x\ln x-2x+\frac{x^2}{2}+4,\ x>0$

Η w συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $w'(x)=\ln x-1+x$

Η w' συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $w''(x)=\frac{1}{x}+1>0$

άρα η w' είναι γνησίως αύξουσα και $w'(1)=0$ άρα για κάθε

$x>1 \overset{w'\nearrow}{\Leftrightarrow} w'(x)>0$

Αφού η w είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και σύμφωνα με το διπλανό πίνακα θα ισχύουν:

x	0	1	$+\infty$
w'	$-$		$+$
w	↘		↗

η w είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$,
η w είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, η w παρουσιάζει για $x=1$ ολικό ελάχιστο το $w(1)=\frac{5}{2}$ άρα $w(x)\geq\frac{5}{2}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

συνεπώς $w(\beta)\geq\frac{5}{2}$. Ισχύει $-1\leq\sigma\upsilon\nu x\leq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα και

$\sigma\upsilon\nu\left(\beta+\beta^{\alpha}\right)\leq 1$ συνεπώς

$\sigma\upsilon\nu\left(\beta+\beta^{\alpha}\right)<w(\beta)\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\beta+\beta^{\alpha}\right)<\beta\ln\beta-2\beta+\frac{\beta^2}{2}+4$. Τότε

$$f(\alpha^2+1)<f(\alpha^2+3)\Rightarrow\int_{\sigma\upsilon\nu\left(\beta+\beta^{\alpha}\right)}^{\beta\ln\beta-2\beta+\frac{\beta^2}{2}+4} f(\alpha^2+1)d\alpha<\int_{\sigma\upsilon\nu\left(\beta+\beta^{\alpha}\right)}^{\beta\ln\beta-2\beta+\frac{\beta^2}{2}+4} f(\alpha^2+3)d\alpha\Leftrightarrow$$

$$\int_{\beta\ln\beta-2\beta+\frac{\beta^2}{2}+4}^{\sigma\upsilon\nu(\beta+\beta^{\alpha})} f(\alpha^2+3)d\alpha<\int_{\beta\ln\beta-2\beta+\frac{\beta^2}{2}+4}^{\sigma\upsilon\nu(\beta+\beta^{\alpha})} f(\alpha^2+1)d\alpha$$

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργαστήκαν: Γ.Ανδρουλιδάκης, Μ.Βυνιχάκης, Α.Δουλγεράκης, Η.Μαργαρίτη, Μ.Μπαρμπούνη, Α.Τσιλιφώνης.