Λύσεις

Θέμα 1ο

α) Η Ευκλείδεια διαίρεση του 2014 με το 4 μας δίνει $2014 = 4\cdot 503 + 2$

άρα $i^{2014} = i^{4\cdot 503+2} = \left(i^4\right)^{503} i^2 = -1$

$$|z|^2 + 5zi + 3(11 + zi^{2014}) = \bar{z}(3+5i) \Leftrightarrow$$

$$|z|^2 + 5zi + 3(11 - z) = \bar{z}(3+5i) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + 5(x+yi)i + 33 - 3(x+yi) = (x-yi)(3+5i) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 33 = 0 \quad (1) \quad A^2 + B^2 - 4\Gamma = 36 + 100 - 132 = 4$$

Άρα η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(3,5) και ακτίνα ρ=1.

β) Από τη δοσμένη σχέση έχουμε:

$$|w_1 + w_2| = |w_1 + iw_2| \Leftrightarrow |w_1 + w_2|^2 = |w_1 + iw_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$(w_1 + w_2)(\overline{w_1} + \overline{w_2}) = (w_1 + iw_2)(\overline{w_1} - i\overline{w_2}) \Leftrightarrow$$

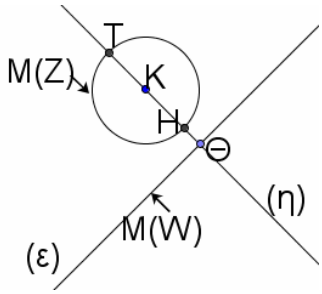
$$w_1\overline{w_2} + w_2\overline{w_1} = -i(w_1\overline{w_2} - w_2\overline{w_1}) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$w + \overline{w} = -i(w - \overline{w}) \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(w) = -i2\mathrm{Im}(w)i \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Im}(w) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow x - y = 0$$

γ) Η ελάχιστη απόσταση των εικόνων του z από τις εικόνες του w, δηλαδή η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$ θα είναι η

$$(H\Theta) = (K\Theta) - \rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} - 1 = \frac{|3-5|}{\sqrt{1+1}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$



Οι μιγαδικοί z, w που παρουσιάζουν την ελάχιστη απόσταση θα είναι αντίστοιχα αυτοί με εικόνες τα σημεία Η, Θ.

$\lambda_\varepsilon \lambda_n = -1 \Leftrightarrow \lambda_n = -1$ άρα η ευθεία (η) προκύπτει από τον τύπο: $y - y_0 = \lambda_n(x - x_0) \Leftrightarrow y - 5 = -1(x-3) \Leftrightarrow y = -x + 8$

Το σημείο Θ προκύπτει από την λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{array}{l} y = -x + 8 \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x,y) = (4,4) \text{ άρα } \Theta(4,4)$$

Το σημείο Η προκύπτει από την λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{array}{l} y = -x + 8 \\ (x-3)^2 + (y-5)^2 = 1 \end{array}\right\} \ldots H\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 3, -\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\right), T\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 3, \frac{\sqrt{2}}{2} + 5\right)$$

φροντιστήρια πουκαμισάς

άρα οι μιγαδικοί z, w που παρουσιάζουν την ελάχιστη απόσταση είναι $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+3+i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+5\right)$ και $w=4+4i$.

δ) Για το ημιεπίπεδο Π_1 που ορίζει η ευθεία $x-y=0$ και οι εικόνες του z ισχύει $x<y$.

Έστω ότι υπάρχουν μιγαδικοί z_1,z_2,z_3 με

$z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2,\ z_3=x_3+iy_3$ τότε

$z_1+z_2+z_3+\kappa+\lambda i=0\Leftrightarrow x_1+iy_1+x_2+iy_2+x_3+iy_3+k+\lambda i=0\Leftrightarrow$

$x_1+x_2+x_3+k+i(y_1+y_2+y_3+\lambda)=0\Leftrightarrow$

$x_1+x_2+x_3+k=0$ και $y_1+y_2+y_3+\lambda=0$ άτοπο γιατί:

$x_1<y_1,\ x_2<y_2,\ x_3<y_3,\ \kappa<\lambda$ με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$x_1+x_2+x_3+k<y_1+y_2+y_3+\lambda$

άρα δεν μπορεί να είναι $x_1+x_2+x_3+k=0$ και $y_1+y_2+y_3+\lambda=0$.

Συνεπώς δεν υπάρχουν μιγαδικοί z τέτοιοι ώστε $z_1+z_2+z_3+\kappa+\lambda i=0$.

Θέμα 2ο

α) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(-e^x+x-2)=-e-1$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{\ln^2x}{2}+x-\ln x-e-2\right)=-e-1$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-e-1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1}f(x)=-e-1$ και $f(1)=-e-1$ άρα $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-e^x+x-2+e+1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to1^-}\frac{-e^x+1}{1}=1-e$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{\ln^2x}{2}+x-\ln x-e-2+e+1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}\ln x+1-\frac{1}{x}}{1}=0$$

άρα $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1)$ με $f'(x)=1-e^x$

$f'(x)>0\Leftrightarrow1-e^x>0\Leftrightarrow x<0$

φροντιστήρια πουκαμισάς

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{x}\ln x+1-\frac{1}{x}=\frac{\ln x+(x-1)}{x}>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ αφού $x-1>0$ και $\ln x>0$.
Η f είναι συνεχής στο $[0,1)\cup(1,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών και στο $x_0=1$ από το ερώτημα α) άρα είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Τότε σύμφωνα με τον διπλανό πίνακα,

x	0	1	$+\infty$
f′	−		+
f	↘		↗

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$,
η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,
η f παρουσιάζει για x=0 τοπικό μέγιστο το $f(0)=-3$, η f παρουσιάζει για x=1 ολικό ελάχιστο το $f(1)=-e-1$.

γ) Έστω $\Delta_1=[0,1]$, $\Delta_2=(1,+\infty)$ και λόγω της μονοτονίας της f έχουμε:

$f(\Delta_1)=[f(1),f(0)]=[-e-1,-3]$ και $f(\Delta_2)=\left(f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-e-1,+\infty)$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x\left(\frac{\ln x}{2}+\frac{x-e-2}{\ln x}-1\right)\right)$$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-e-2}{\ln x}\right)\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

Αν $\lambda<-e-1$ η $f(x)=\lambda$ αδύνατη.
Αν $\lambda=-e-1$ η $f(x)=\lambda$ έχει μία λύση αφού $\lambda\in f(\Delta_1)$ μόνο.
Αν $-e-1<\lambda<-3$ η $f(x)=\lambda$ έχει δύο λύσεις αφού $\lambda\in f(\Delta_1)$, $\lambda\in f(\Delta_2)$.
Αν $\lambda=-3$ η $f(x)=\lambda$ έχει δύο λύσεις αφού $\lambda\in f(\Delta_1)$, $\lambda\in f(\Delta_2)$.
Αν $\lambda>-3$ η $f(x)=\lambda$ έχει μία λύση αφού $\lambda\in f(\Delta_2)$ μόνο.

δ) $\ln^2(x^2+2)-\ln^2(x^4+2)+2x^2>2\ln\left(\frac{x^2+2}{x^4+2}\right)+2x^4\Leftrightarrow$

$\ln^2(x^2+2)-\ln^2(x^4+2)+2x^2>2\ln(x^2+2)-2\ln(x^4+2)+2x^4\Leftrightarrow$

$\ln^2(x^2+2)-2\ln(x^2+2)+2x^2>\ln^2(x^4+2)-2\ln(x^4+2)+2x^4\Leftrightarrow$

$$f(x^2+2)>f(x^4+2)\underset{x^4+2>1}{\overset{x^2+2>1}{\Leftrightarrow}}x^2+2>x^4+2\Leftrightarrow x^2(1-x^2)>0\Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(0,1)$$

ε) Έστω $w(x)=x\int\limits_{2014}^{x}f(t)dt$. Η f είναι συνεχής στο $[0,2014]$ άρα η

$\int_{2014}^{x} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη, άρα η w είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2014]$ ως γινόμενο, άρα και συνεχής. Επίσης $w(0)=w(2014)=0$, άρα ισχύει το Θεώρημα Rolle, συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,2014)$ τέτοιο ώστε $W'(\xi)=0 \Leftrightarrow \int_{2014}^{\xi} f(t)dt+\xi f(\xi)=0$.

Θέμα 3ο

α) $\int_{0}^{-x}\frac{f'(x+t)}{e^t}dt \overset{x+t=w}{=} \int_{x}^{0}\frac{f'(w)}{e^{w-x}}dw=-e^x\int_{0}^{x}f'(w)e^{-w}dw$ τότε

$\int_{0}^{-x}\frac{f'(x+t)}{e^t}dt=-xe^x \Leftrightarrow -e^x\int_{0}^{x}f'(w)e^{-w}dw=-xe^x \Leftrightarrow \int_{0}^{x}f'(w)e^{-w}dw=x$. Η f' είναι συνεχής από την υπόθεση, η e^{-w} είναι συνεχής ως σύνθεση, άρα η $\int_{0}^{x}f'(w)e^{-w}dw$ παραγωγίσιμη. Τότε

$\int_{0}^{x}f'(w)e^{-w}dw=x \Rightarrow f'(x)e^{-x}=1 \Leftrightarrow f'(x)=e^x \Leftrightarrow f(x)=e^x+c$.

$\int_{0}^{1}f(t)dt=\int_{0}^{1}(e^x+c)dt=\left[e^x+cx\right]_0^1=e+c-1$ άρα

$f\left(\int_{0}^{1}f(t)dt-e+1\right)=e^{-1}-1 \Leftrightarrow f(c)=e^{-1}-1 \Leftrightarrow e^c+c=e^{-1}-1 \Leftrightarrow c=-1$ (η $q(x)=e^x+x$ είναι 1-1) συνεπώς $f(x)=e^x-1$.

β) Έστω ότι υπάρχει $x_0<0$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$ τότε

$g^2(x_0)=\left(\frac{f(x_0)}{x_0}\right)^2 \Leftrightarrow f(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}-1=0 \Leftrightarrow x_0=0$ άτοπο, άρα $g(x)\neq 0$ για κάθε $x<0$ και αφού g συνεχής θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty,0)$.

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$. Επίσης η $\frac{f(x)}{x}=\frac{e^x-1}{x}$ διατηρεί θετικό πρόσημο σε καθένα από τα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$, συνεπώς οι πιθανοί τύποι της g είναι: $g(x)=\frac{f(x)}{x}, x\in\mathbb{R}^*$ ή $g(x)=-\frac{f(x)}{x}, x\in\mathbb{R}^*$,

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x<0\\ -\frac{f(x)}{x}, & x>0\end{cases} \quad \text{ή} \quad g(x)=\begin{cases}-\frac{f(x)}{x}, & x<0\\ \frac{f(x)}{x}, & x>0\end{cases}$$

γ) i) $T(x)=\int_1^x \frac{e^t-1}{t}dt$. Η $g(x)=\frac{e^x-1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\frac{e^x x-e^x+1}{x^2}$. Έστω $k(x)=e^x x-e^x+1, x>0$ τότε $k'(x)=e^x x>0$ για κάθε $x>0$, άρα η k είναι γνησίως αύξουσα με $\lim_{x\to 0}k(x)=0$, άρα $k(x)>0$, άρα η g γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Για κάθε $t\in[1,x]$ και $x>1$ έχουμε:

$$1\le t\le x \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(1)\le g(t)\le g(x) \Rightarrow \int_1^x (e-1)dt\le\int_1^x g(t)dt\le\int_1^x g(x)dt \Leftrightarrow$$

$$(e-1)\int_1^x dt\le\int_1^x g(t)dt\le g(x)\int_1^x dt \Leftrightarrow (e-1)(x-1)\le\int_1^x g(t)dt\le(x-1)\frac{e^x-1}{x}$$

$\lim_{x\to+\infty}(e-1)(x-1)=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}(x-1)\frac{e^x-1}{x}=+\infty$ αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=1$, $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-1\right)=+\infty$ άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής και $\lim_{x\to+\infty}T(x)=+\infty$.

ii) $g(x)=\int_{x_0}^{x_0+1} g(t)dt=\int_{x_0}^{1} g(t)dt+\int_1^{x_0+1} g(t)dt=\int_1^{x_0+1} g(t)dt-\int_1^{x_0} g(t)dt \Leftrightarrow$

$g(x)=T(x_0+1)-T(x_0)$

Η $g(t)=\dfrac{e^t-1}{t}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, άρα η Τ είναι παραγωγίσιμη, οπότε και συνεχής στο $(0,+\infty)$.
Η Τ είναι συνεχής στο $[x_0,x_0+1]$.
Η Τ είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,x_0+1) άρα ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής, συνεπώς υπάρχει $x\in(x_0,x_0+1)$ τέτοιο ώστε:

$$T'(x)=\frac{T(x_0+1)-T(x_0)}{x_0+1-x_0}\Leftrightarrow g(x)=T(x_0+1)-T(x_0).$$

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν:
Γ.Ανδρουλιδάκης, Μ.Βυνιχάκης, Α.Δουλγεράκης, Η.Μαργαρίτη, Μ.Μπαρμπούνη, Α.Τσιλιφώνης.