Λύσεις

Θέμα 1ο

α) 3-x≥0 $\Leftrightarrow x \le 3$ και $\sqrt{3-x} > 0 \Leftrightarrow x < 3$, επομένως $D_f = (-\infty, 3)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D_f = (-\infty, 3)$ με

$$f'(x) = \left(\ln\left(\sqrt{3-x}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{3-x}}(\sqrt{3-x})' = \frac{1}{\sqrt{3-x}}\frac{1}{2\sqrt{3-x}}(3-x)' =$$

$$= -\frac{1}{2(3-x)} = \frac{1}{2(x-3)} < 0 \text{ για κάθε } x \in D_f = (-\infty, 3)$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (-\infty, 3)$

β) Τα α, β ανήκουν στο $D_f = (-\infty, 3)$ αφού ορίζονται οι τιμές της συνάρτησης f(α) και f(β). Επομένως έχουμε α<3 και β<3. Γνωρίζοντας όμως ότι f(α)<f(β) και f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (-\infty, 3)$, προκύπτει ότι β<α<3. Διατάσσουμε τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά : β, α, 3 ,10 και επειδή το πλήθος είναι άρτιο, η διάμεσος θα είναι $\delta = \frac{\alpha+3}{2} \Leftrightarrow -1 = \frac{\alpha+3}{2} \Leftrightarrow \alpha = -5$

Γνωρίζουμε επιπλέον ότι $\bar{x} = -1$, επομένως

$$\frac{\beta+\alpha+3+10}{4} = -1 \overset{\alpha=-5}{\Leftrightarrow} \frac{\beta+8}{4} = -1 \Leftrightarrow \beta = -12$$

γ) $\alpha_2 = 25 \Leftrightarrow \alpha_0 + 2c = 25$

$\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2} = 40 \Leftrightarrow \alpha_3 + \alpha_4 = 80 \Leftrightarrow 2\alpha_0 + 7c = 80$ άρα c=10, $\alpha_0 = 5$

i) $v_2 = -100f'(2) = -100\frac{1}{2(-2-3)} = -100\frac{1}{-10} = 10$,

$v_4 = -\frac{5}{f'(1)} = -\frac{5}{\frac{1}{2(1-3)}} = 20$, $f_5 = \frac{1}{-200f'(-7)} = \frac{1}{-200\frac{1}{2(-7-3)}} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$x_1 v_1 = 40 \Leftrightarrow 10v_1 = 40 \Leftrightarrow v_1 = 4$

φροντιστήρια πουκαμισάς

ii) Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

[-)	x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$x_i v_i$
5-15	10	4	4	0,08	0,08	40
15-25	20	10	14	0,20	0,28	200
25-35	30	11	25	0,22	0,50	330
35-45	40	20	45	0,40	0,90	800
45-55	50	5	50	0,10	1	250
ΣΥΝΟΛΟ	-------	50	-------	1	-------	1620

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i}{v}=\frac{1620}{50}=32,4 \text{ λεπτά.}$$

iii) Το ποσοστό των εργαζομένων που χρειάζονται τουλάχιστον 12,5 λεπτά αλλά το πολύ 30 λεπτά ώστε να φτάσουν στον τόπο εργασίας τους είναι : $\frac{f_1}{4}\%+f_2\%+\frac{f_3}{2}\%=2+20+11=33\%$

Θέμα 2ο

α) $F'(x)=\left(2x^3-\lambda x^2\right)'=6x^2-2\lambda x$

β) Ψάχνουμε ευθεία της μορφής y=λx+κ όπου $\lambda=F'(2)$ και την ευθεία την επαληθεύει το σημείο (2, F(2)) όπου

$F(2)=2\cdot 2^3-\lambda\cdot 2^2=16-4\lambda$, $F'(2)=6\cdot 2^2-2\cdot\lambda\cdot 2=24-4\lambda$.

Επομένως έχουμε: $y=(24-4\lambda)x+\kappa$, το σημείο (2, F(2)) είναι σημείο της ευθείας άρα έχουμε 16-4λ=(24-4λ)2+κ ⇔

16-4λ=48-8λ+κ ⇔ κ=4λ-32.

Άρα τελικά (ε): y=(24-4λ)x+4λ-32

φροντιστήρια πουκαμισάς

γ) $\varepsilon // n \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\eta \Leftrightarrow 24-4\lambda = 8 \Leftrightarrow 4\lambda = 16 \Leftrightarrow \lambda = 4$ Άρα έχουμε A={4},

N(A)=1 επομένως $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{9}$

$\varepsilon \perp \zeta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow (24-4\lambda)\left(-\frac{1}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow$

$24-4\lambda = 4 \Leftrightarrow 4\lambda = 20 \Leftrightarrow \lambda = 5$. Άρα έχουμε B={5}, N(B)=1 οπότε

$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{9}$

$\lim\limits_{x\to 1} F(x) = \lambda^2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\left(2x^3 - \lambda x^2\right) = \lambda^2 \Leftrightarrow 2-\lambda = \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

άρα $\lambda = 2$ ή $\lambda = 1$. Τελικά έχουμε Γ={-2,1}, N(Γ)=2 άρα

$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(\Gamma) = \frac{2}{9}$.

Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τον ρυθμό μεταβολής της F δηλαδή θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την πρώτη παράγωγο της F.

Έχουμε $F'(x) = 6x^2 - 2\lambda x$ και $F''(x) = 12x - 2\lambda$

$F''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 12x = 2\lambda \Leftrightarrow x = \frac{\lambda}{6}$

$F''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x - 2\lambda > 0 \Leftrightarrow 12x > 2\lambda \Leftrightarrow x > \frac{\lambda}{6}$

Σύμφωνα με τον διπλανό πίνακα ο ρυθμός μεταβολής ελαχιστοποιείται για $x = \frac{\lambda}{6}$ και η ελάχιστη τιμή του είναι $F'\left(\frac{\lambda}{6}\right) = 6\left(\frac{\lambda}{6}\right)^2 - 2\lambda\frac{\lambda}{6} = \frac{6\lambda^2}{6^2} - \frac{2\lambda^2}{6} = -\frac{\lambda^2}{6}$

x	$-\infty$	$\lambda/6$	$+\infty$
F″(x)	−		+
F′(x)	↘		↗

Επομένως θα πρέπει $-\frac{\lambda^2}{6} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = 3$ ή $\lambda = -3$

Άρα Δ={-3,3}, επομένως N(Δ)=2. Τελικά $P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(\Delta) = \frac{2}{9}$

φροντιστήρια πουκαμισάς

Θέμα 3ο

Α. α) Πρέπει $s^2=4$ άρα $s=2$, οπότε η μέση τιμή $\bar{x}=-2$, αφού $\bar{x}\neq 0$ για να ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής CV και δ=0.

β) Αν ακολουθεί την κανονική κατανομή τότε πρέπει $\bar{x}=\delta$, άτοπο αφού $\bar{x}<\delta$.

γ) Εφόσον παρουσιάζει ασυμμετρία και $\bar{x}<\delta$ τότε αυτή είναι αρνητική

δ) i) Είναι $P(-2)=\frac{3}{16}, P(1)=\frac{1}{4}, P(2)=\frac{1}{8}, P(4)=\frac{1}{16}$

ισχύει $P(-2)+P(0)+P(1)+P(2)+P(4)=1 \Leftrightarrow$

$\frac{3}{16}+P(0)+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=1 \Leftrightarrow P(0)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

ii) $A=\{\bar{x},\delta\}=\{-2,0\}$, άρα

$P(A)=P(-2)+P(0)=\frac{3}{16}+\frac{6}{16}=\frac{9}{16}$ $B=\{s,s^2,CV\}=\{2,4,1\}$ άρα

$P(B)=P(2)+P(4)+P(1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{7}{16}$

$\Gamma=\{\bar{x},\delta,s\}=\{-2,0,2\}$ άρα

$P(\Gamma)=P(-2)+P(0)+P(2)=\frac{3}{16}+\frac{6}{16}+\frac{1}{8}=\frac{11}{16}$

Β α) Έχουμε $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (1-x)e^{-x}=0 \overset{e^{-x}\neq 0}{\Leftrightarrow} x=1$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow (1-x)e^{-x}>0 \overset{e^{-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-x>1 \Leftrightarrow x<1$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει στο $x=1$ μέγιστο το $f(1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
F′(x)	+		–
F(x)	↗		↘

β) Για κάθε $x\leq 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)\leq f(1) \Leftrightarrow f(x)\leq \frac{1}{e}$

Για κάθε $x\geq 1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)\leq f(1) \Leftrightarrow f(x)\leq \frac{1}{e}$

Συνεπώς $f(x)\leq \frac{1}{e}$, για κάθε $x\in R$.

γ) i) Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι:

$\bar{x}=g(0)=5-(0+1)e^{0}=5-1=4$

Έχουμε $g'(x)=-(e^{-x}-(x+1)\,e^{-x})=-e^{-x}(1-x-1)=xe^{-x}=f(x)$,για κάθε $x\in R$.

Οπότε $s=g'(a)=ae^{-a}=f(a)=\dfrac{\alpha}{e^{\alpha}}$

ii) Επειδή $\bar{x}=4$ και $s=\dfrac{\alpha}{e^{\alpha}}$ τότε το διάστημα $(4,\,4+\dfrac{2\alpha}{e^{\alpha}})$ είναι το διάστημα $(\bar{x},\bar{x}+2s)$ της κανονικής κατανομής στο οποίο αντιστοιχεί ποσοστό $\dfrac{95\%}{2}=47{,}5\%$. Όμως, υπάρχουν 1900 παρατηρήσεις στο διάστημα αυτό. Επομένως $\dfrac{47{,}5}{100}\cdot v=1900 \Leftrightarrow$ $v=4000$.

iii) Ο συντελεστής μεταβλητότητας του δείγματος των παρατηρήσεων είναι: $CV=\dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{f(\alpha)}{4}$ Επειδή ισχύει $f(x)\le\frac{1}{e}$, για κάθε $x\in R$ τότε $f(a)\le\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow\dfrac{f(\alpha)}{4}\le\dfrac{1}{4e}\Leftrightarrow CV\le\dfrac{1}{4e}<\dfrac{1}{10}$ Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργαστήκαν: Γ.Ανδρουλιδάκης, Μ.Βυνιχάκης, Α.Δουλγεράκης, Η.Μαργαρίτη, Μ.Μπαρμπούνη, Α.Τσιλιφώνης.