Λύσεις

Θέμα 1ο

α) Η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με: $f'(x)=\frac{1}{x}+1>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Αφού η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα και 1-1.

$$f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=1$$

β) Από την υπόθεση έχουμε:

$$\ln(|z+i|+1)+|z+i|+1\geq\ln(|z|+2)+|z|+2\Leftrightarrow f(|z+i|+1)\geq f(|z|+2)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$$

$$|z+i|\geq|z|+1\Leftrightarrow|z+i|^2\geq(|z|+1)^2\Leftrightarrow(z+i)(\bar{z}-i)\geq|z|^2+2|z|+1\Leftrightarrow$$

$$|z|^2-zi+i\bar{z}+1\geq|z|^2+2|z|+1\Leftrightarrow -i(z-\bar{z})\geq 2|z|\overset{z=k+vi}{\Leftrightarrow}$$

$$-i(2vi)\geq 2\sqrt{k^2+v^2}\Leftrightarrow v\geq\sqrt{k^2+v^2}\overset{v\geq 0}{\Leftrightarrow}k^2\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases}k=0\\ v\geq 0\end{cases}$$

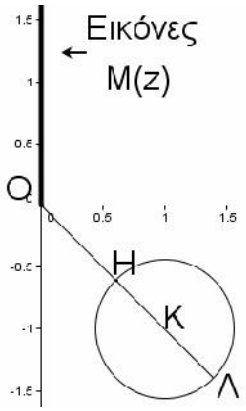
συνεπώς $z=k+vi=vi,\ \in I$

γ) Από την υπόθεση έχουμε:

$$\ln\left(|w-1+i|+\frac{1}{2}\right)+|w-1+i|-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow f\left(|w-1+i|+\frac{1}{2}\right)=f(1)$$

$$\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}|w-(1-i)|+\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow|w-(1-i)|=\frac{1}{2}$$

άρα οι εικόνες των μιγαδικών w M(w) είναι σημεία του κύκλου με κέντρου K(1, -1) και ακτίνας ρ=1/2.



δ) Το $|z-w|$ παριστάνει την απόσταση των εικόνων M(z) από τις εικόνες M(w). Συνεπώς

$|z-w|\geq(OH)$ αλλά $(OH)=(OK)-\rho=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

άρα $|z-w|\geq\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

φροντιστήρια πουκαμισάς

Θέμα 2ο

α) Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα, διαφορά και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα, διαφορά και γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$f'(x)=2+\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Ισχύει : $f(1)=2+\ln 1-2=0$

Άρα για κάθε $x>1$ έχουμε:

$x>1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>0$

ενώ για κάθε $0<x<1$ έχουμε:

$x<1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(1)\Leftrightarrow f(x)<0$

x	0	1	$+\infty$
f	$-$		$+$

β) Η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά, πηλίκο και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά πηλίκο και γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x)=\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)2\sqrt{x}-(2x-\ln x)\left(2\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{4x}=\frac{4\sqrt{x}-\frac{2\sqrt{x}}{x}-\frac{2x}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{4x}=$$

$$\frac{\frac{4x^2-2x-2x^2+x\ln x}{x\sqrt{x}}}{4x}=\frac{x(2x-2+\ln x)}{x\sqrt{x}\,4x}=\frac{f(x)}{4x\sqrt{x}}\Leftrightarrow$$

$$g'(x)=\frac{f(x)}{4x\sqrt{x}},\ x>0$$

Για κάθε $x>0$ ισχύει $4x\sqrt{x}>0$ άρα

$$g'(x)>0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{4x\sqrt{x}}>0\Leftrightarrow f(x)>0\Leftrightarrow x>1$$

Αφού η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και σύμφωνα με το διπλανό πίνακα θα ισχύουν:

x	0	1	$+\infty$
g′	$-$		$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$,

η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,

η g παρουσιάζει για $x_0=1$ ολικό ελάχιστο το $g(1)=1$.

γ) Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ άρα για κάθε $x\in(0,1)$ με $x<1$

ισχύει: $x<1\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(1)\Leftrightarrow g(x)>1$

φροντιστήρια πουκαμισάς

άρα η $g(x)=1$ δεν έχει ρίζα στο $(0,1)$.
Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ άρα για κάθε $x\in(1,+\infty)$ με $x>1$
ισχύει: $x>1 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(1) \Leftrightarrow g(x)>1$
άρα η $g(x)=1$ δεν έχει ρίζα στο $(1,+\infty)$
Αλλά $g(1)=1$ άρα η $g(x)=1$ έχει μοναδική θετική ρίζα το $x_0=1$ στο $(0,+\infty)$.

δ) Η εφαπτομένη της w στο σημείο της $A(1,w(1))$ θα είναι:
$y-w(1)=w'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-0=3(x-1) \Leftrightarrow y=3x-3$
Άρα $\varepsilon_1: y=3x-3$ η εφαπτομένη της w στο Α.
Αφού η w κυρτή στο $(0,+\infty)$ και ε_1 εφαπτομένη της για κάθε $x\in(0,+\infty)$
θα ισχύει: $w(x)\geq 3x-3$ (1)
Η εφαπτομένη της f στο σημείο της $B(1,f(1))$ θα είναι:
$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-0=3(x-1) \Leftrightarrow y=3x-3$
Άρα $\varepsilon_2: y=3x-3$ η εφαπτομένη της f στο Β.
Αφού $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$, η f κοίλη στο $(0,+\infty)$. Η ε_2 εφαπτομένη της, άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ θα ισχύει: $f(x)\leq 3x-3$ (2)
Τότε από (1), (2) θα έχουμε:
$f(x)\leq 3x-3\leq w(x)$ συνεπώς $f(x)\leq w(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$
ε) Έστω ότι υπάρχουν σημεία $K(x_1,y_1)$, $\Lambda(x_2,y_2)$, $M(x_3,y_3)$ με $0<x_1<x_2<x_3$ που ανήκουν στην C_w ώστε να είναι συνευθειακά.
Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) που ορίζουν τα Κ, Λ θα είναι: $\lambda_\varepsilon=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{w(x_2)-w(x_1)}{x_2-x_1}$
Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (η) που ορίζουν τα Λ, Μ θα είναι:
$\lambda_\eta=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\dfrac{w(x_3)-w(x_2)}{x_3-x_2}$
Αφού τα Κ, Λ, Μ συνευθειακά η $\eta\equiv\varepsilon$ άρα
$\lambda_\varepsilon=\lambda_\eta \Leftrightarrow \dfrac{w(x_2)-w(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{w(x_3)-w(x_2)}{x_3-x_2}$ (3)
Η w συνεχής σε καθένα από τα $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$ αφού είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
Η w παραγωγίσιμη σε καθένα από τα (x_1,x_2), (x_2,x_3).

Συνεπώς ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής διαφορικού λογισμού σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$ άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1,x_2)$, $\xi_2 \in (x_2,x_3)$ τέτοια ώστε:

$$w'(\xi_1)=\frac{w(x_2)-w(x_1)}{x_2-x_1} \text{ και } w'(\xi_2)=\frac{w(x_3)-w(x_2)}{x_3-x_2}$$

Τότε από την σχέση (3) έχουμε $w'(\xi_1)=w'(\xi_2)$ άτοπο γιατί:
Η w είναι κυρτή άρα η w' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και

$$\xi_1<\xi_2 \overset{w'\nearrow}{\Leftrightarrow} w'(\xi_1)<w'(\xi_2).$$

Συνεπώς δεν υπάρχουν σημεία Κ, Λ, Μ που να ανήκουν στην C_w και να είναι συνευθειακά.

στ) Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ υπάρχει $\alpha>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x>\alpha$ να είναι $f(x)>0$ και λόγω της σχέσης $w(x)\geq f(x)$ και $w(x)>0$ για κάθε $x>\alpha$.
Τότε για κάθε $x>\alpha$ ισχύει

$$w(x)\geq f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{w(x)}\leq\frac{1}{f(x)} \quad \Leftrightarrow \quad 0\leq\frac{1}{w(x)}\leq\frac{1}{f(x)} \quad \text{Αλλά } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0.$$

Τότε από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{w(x)}=0$

Έστω $h(x)=\frac{1}{w(x)}$ τότε $w(x)=\frac{1}{h(x)}$

Αφού $h(x)>0$ για κάθε $x>\alpha$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$

$$\lim_{x\to+\infty} w(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{h(x)}=+\infty$$

Θέμα 3ο

α) Έστω ότι υπάρχει $x_0\in[1,2)$ ώστε $f'(x_0)=0$ τότε επειδή $f''(x)<0$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$ οπότε αφού $x_0<2$ θα ισχύει $f'(x_0)>f'(2)\Leftrightarrow 0>1$ που είναι άτοπο. Άρα $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$ και επειδή είναι συνεχής στο $[1,2]$ αφού f δύο φορές παραγωγίσιμη, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[1,2]$ και επειδή $f'(2)=1>0$ θα είναι $f'(x)>0$ επομένως f γνησίως αύξουσα στο $\Delta=[1,2]$ και θα έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta)=[f(1),f(2)]=[0,2]$

β) Η εφαπτομένη στο σημείο της $B(2,f(2))$ θα έχει εξίσωση $y-f(2)=f'(2)(x-2)$ άρα σύμφωνα με την υπόθεση $y-2=x-2 \Leftrightarrow y=x$

γ) Η f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης τιμής για την f, άρα υπάρχει

$x_1 \in (1,2)$ ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} \Leftrightarrow f'(x_1)=2$

Η f' είναι συνεχής στο $[x_1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_1,2)$ άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης τιμής για την f', άρα υπάρχει

$x_0 \in (x_1,2)$ ώστε $f''(x_0)=\dfrac{f'(2)-f'(x_1)}{2-x_1}=\dfrac{1-2}{2-x_1}=-\dfrac{1}{2-x_1}<-1$ γιατί

$1<x_1<2 \Leftrightarrow -1>-x_1>-2 \Leftrightarrow 1>2-x_1>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2-x_1}>1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2-x_1}<-1$

δ) i) Για $x \in (1,2)$, στα διαστήματα $[1,x],[x,2]$ από Θεώρημα Μέσης τιμής υπάρχουν $x_1 \in (1,x)$, $x_2 \in (x,2)$ ώστε

$f'(x_1)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και $f'(x_2)=\dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$ και επειδή $x_1<x_2$ και f' γνησίως φθίνουσα αφού $f''(x)<0$ θα ισχύει

$f'(x_1)>f'(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>\dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$

ii) Από $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>\dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$, $x \in (1,2)$ ισοδύναμα

$\dfrac{f(x)}{x-1}>\dfrac{2-f(x)}{2-x} \Leftrightarrow (2-x)f(x)>(x-1)(2-f(x)) \Leftrightarrow ...f(x)>2(x-1)$

και επειδή $f(1)=0$, $f(2)=2$ τελικά $f(x)\geq 2(x-1)$, $x \in [1,2]$

ε) Αρκεί η εξίσωση $f(x)=-x+2$ να έχει μοναδική ρίζα, γι' αυτό θεωρούμε την $g(x)=f(x)+x-2$, $x \in [1,2]$ που είναι συνεχής σε αυτό με $g(1)=f(1)+1-2=-1<0$ και $g(2)=f(2)+2-2=2>0$ οπότε $g(1)g(2)<0$ και από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ ώστε $g(x_0)=0$ που είναι και μοναδικό, αφού g παραγωγίσιμη με $g'(x)=f'(x)+1>0$ άρα γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$.

στ) Σε καθένα από τα διαστήματα $[1, x_0], [x_0, 2]$ η g είναι παραγωγίσιμη (άθροισμα παραγωγίσιμων) άρα και συνεχής, συνεπώς ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την g άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (1, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0\ 2)$

ώστε $g'(\xi_1) = \dfrac{g(x_0) - g(1)}{x_0 - 1} = \dfrac{1}{x_0 - 1}$ και $g'(\xi_2) = \dfrac{g(2) - g(x_0)}{2 - x_0} = \dfrac{2}{2 - x_0}$ δηλαδή

$x_0 - 1 = \dfrac{1}{g'(\xi_1)}$ και $2 - x_0 = \dfrac{2}{g'(\xi_2)}$ οπότε

$$x_0 - 1 + 2 - x_0 = \frac{1}{g'(\xi_1)} + \frac{2}{g'(\xi_2)} \Leftrightarrow 1 = \frac{2g'(\xi_1) + g'(\xi_2)}{g'(\xi_1)g'(\xi_2)} \Leftrightarrow$$

$$g'(\xi_1)g'(\xi_2) = 2g'(\xi_1) + g'(\xi_2) \Leftrightarrow$$

$$(f'(\xi_1) + 1)(f'(\xi_2) + 1) = 2(f'(\xi_1) + 1) + f'(\xi_2) + 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2) + f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + 1 = 2f'(\xi_1) + 2 + f'(\xi_2) + 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = f'(\xi_1) + 2$$

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν:
Γ.Ανδρουλιδάκης, Μ.Βυνιχάκης, Α.Δουλγεράκης, Η.Μαργαρίτη, Μ.Μπαρμπούνη, Α.Τσιλιφώνης.