Λύσεις

Θέμα 1ο

α) $|z-(1+i)|^2+|\bar{z}i+3+3i|^2=20 \Leftrightarrow |x+yi-1-i)|^2+|(x-yi)i+3+3i|^2=20 \Leftrightarrow$

$|(x-1)+i(y-1)|^2+|(y+3)+i(x+3)|^2=20 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y-1)^2+(y+3)^2+(x+3)^2=20 \Leftrightarrow$

$x^2+y^2+2x+2y=0 \Leftrightarrow$

$x^2+2x+1+y^2+2y+1=2 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=\sqrt{2}^2 \Leftrightarrow |z-(-1-i)|=\sqrt{2}$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z $M(z)$ είναι κύκλος C_1 κέντρου $k_1(-1,-1)$ και ακτίνας $\rho_1=\sqrt{2}$.

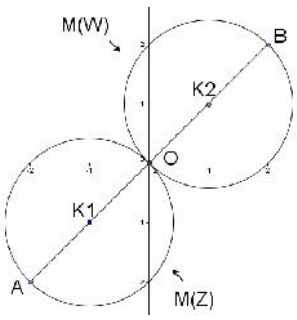
β) Από την υπόθεση έχουμε: $w-z=2+2i \Leftrightarrow z=w-2-2i$ (1)

Τότε από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$|z-(-1-i)|=\sqrt{2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |w-2-2i-(-1-i)|=\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$|w-1-i|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |w-(1+i)|=\sqrt{2}$ άρα οι εικόνες των μιγαδικών w $M(w)$ είναι σημεία του κύκλου C_2 με κέντρο $k_2(1,1)$ και ακτίνα $\rho_2=\sqrt{2}$.

γ) Το $O(0,0)$ είναι σημείο του κύκλου C_1 άρα για το $|z|$ θα ισχύει: $|z| \le (OA) \Leftrightarrow |z| \le (OK_1)+\rho_1 \Leftrightarrow |z| \le 2\sqrt{2}$



Το $O(0,0)$ είναι σημείο του κύκλου C_2 άρα για το $|w|$ θα ισχύει: $|w| \le (OB) \Leftrightarrow |w| \le (OK_2)+\rho_2 \Leftrightarrow |w| \le 2\sqrt{2}$

Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ θα είναι το 0 και ο μιγαδικός z με το ελάχιστο μέτρο είναι ο $z_0=0+0i$ αφού το $O(0,0)$ είναι σημείο του κύκλου C_1.

Τότε από τη σχέση $w-z=2+2i$ για $z=z_0$ έχουμε $w_0=2+2i$ και $|w_o|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ δηλαδή το μέτρο του w γίνεται μέγιστο. Συνεπώς όταν το $|z|$ γίνεται ελάχιστο το $|w|$ γίνεται μέγιστο.

δ) Από τη σχέση $w-z=2+2i$ έχουμε:

$w-z=2+2i \Leftrightarrow z-w=-2-2i \Rightarrow |z-w|=2\sqrt{2}$

$|z+w|=|z+z+2+2i|=|2z+2+2i|=2|z+1+i|=2\sqrt{2}$ αφού $|z+1+i|=\sqrt{2}$ από το ερώτημα α).

φροντιστήρια πουκαμισάς

ε) Έστω συνάρτηση $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-24x+40,\ x\in\mathbb{R}$
Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με
$f'(x)=12x^3-24x^2+12x-24 \Leftrightarrow f'(x)=12(x^3-2x^2+x-2)\Leftrightarrow$
$f'(x)=12(x^2(x-2)+(x-2)) \Leftrightarrow f'(x)=12(x-2)(x^2+2)$
Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και σύμφωνα με το διπλανό πίνακα θα ισχύουν:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f′	−		+
f	↘		↗

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$,
η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$,
η f παρουσιάζει για $x_0=2$ ολικό ελάχιστο το $f(2)=0$.

$$3\left(\frac{|z|}{2}\right)^4-8\left(\frac{|z|}{2}\right)^3+6\left(\frac{|z|}{2}\right)^2-24\left(\frac{|z|}{2}\right)+40<0 \Leftrightarrow f\left(\frac{|z|}{2}\right)<f(2)$$

Αλλά $|z|\le 2\sqrt{2}\Leftrightarrow \frac{|z|}{2}\le\sqrt{2}$ άρα $\frac{|z|}{2}\in(-\infty,2]$ και $2\in(-\infty,2]$ όμως στο $(-\infty,2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα έχουμε:

$$f\left(\frac{|z|}{2}\right)<f(2)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}\frac{|z|}{2}>2\Leftrightarrow |z|>4$$ άτοπο αφού $|z|\le 2\sqrt{2}$ από ερώτημα γ)

συνεπώς δεν υπάρχει μιγαδικός z τέτοιος ώστε

$$3\left(\frac{|z|}{2}\right)^4-8\left(\frac{|z|}{2}\right)^3+6\left(\frac{|z|}{2}\right)^2-24\left(\frac{|z|}{2}\right)+40<0$$

Θέμα 2ο

α) Από τη δοσμένη σχέση έχουμε:

$$x^2f'(x)+f(x)=\frac{(x-1)\ln x-x}{x}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}f'(x)+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{(x-1)\ln x-x}{x^3}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{\ln x-1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^3}\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{x}}\left(f'(x)+\frac{1}{x^2}f(x)\right)=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{\ln x-1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^3}\right)\Leftrightarrow$$

$$e^{-\frac{1}{x}}\left(f'(x)+\frac{1}{x^2}f(x)\right)=e^{-\frac{1}{x}}\left(\left(-\frac{\ln x}{x}\right)'-\frac{\ln x}{x}\frac{1}{x^2}\right)\Leftrightarrow$$

$\left(e^{-\frac{1}{x}}f(x)\right)' = \left(e^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{\ln x}{x}\right)\right)'$. Συνεπώς από Θεώρημα Σταθερής Συνάρτησης προκύπτει ότι $e^{-\frac{1}{x}}f(x) = -e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{\ln x}{x}\right) + c$

για x=1 προκύπτει c=0 άρα $f(x) = -\frac{\ln x}{x},\ x > 0$

β) Η παράσταση $A = \frac{1}{|z| + 2014}$ παίρνει την μέγιστη τιμή όταν το $|z|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή. Συνεπώς αναζητούμε την ελάχιστη τιμή του $|z|$.
Ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$ κινείται στο γράφημα της συνάρτησης g C_g, άρα $z = x + (\ln x - 1)i$ και $|z| = \sqrt{x^2 + (\ln x - 1)^2}$.
Έστω $f(x) = \sqrt{x^2 + (\ln x - 1)^2},\ x > 0$ η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα, διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = \frac{2x + 2(\ln x - 1)\frac{1}{x}}{2\sqrt{x^2 + (\ln x - 1)^2}} = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x\sqrt{x^2 + (\ln x - 1)^2}}$$

Έστω $w(x) = x^2 + \ln x - 1,\ x > 0$ η w συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα και διαφορά παραγωγίσιμων με $w'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$, άρα η w είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $w(1) = 0$. Συνεπώς για κάθε

$x > 1 \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} w(x) > w(1) \Leftrightarrow w(x) > 0$

$0 < x < 1 \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} w(x) < w(1) \Leftrightarrow w(x) < 0$

Αλλά $f'(x) = \frac{w(x)}{x\sqrt{x^2 + (\ln x - 1)^2}}$

x	0	1	$+\infty$
f′	−		+
f	↘		↗

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=1 το $f(1) = \sqrt{2}$ άρα η μέγιστη τιμή της παράστασης A είναι $\frac{1}{\sqrt{2} + 2014}$.

φροντιστήρια πουκαμισάς

γ) Έστω $M(x_0, g(x_0))$ τότε η εφαπτομένη της C_g στο M θα είναι

$$\varepsilon: y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (\ln x_0 - 1) = \frac{1}{x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = \ln x_0 + \frac{x}{x_0} - 2$$

Έστω K το σημείο τομής της ε με τον y'y, τότε $K(0, \ln x_0 - 2)$.
Έστω Λ το σημείο τομής της ε με τον x'x, τότε $\Lambda((2 - \ln x_0)x_0, 0)$
Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ θα είναι:

$$E = \frac{1}{2}\left|\ln x_0 - 2\right|\left|(2 - \ln x_0)x_0\right| \overset{x_0>0}{=} \frac{1}{2}x_0(\ln x_0 - 2)^2$$

Έστω $u(x) = \frac{1}{2}x(\ln x - 2)^2 - 2014,\ x > 0$

$u(1) = -2012$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x(\ln x - 2)^2 - 2014\right) = +\infty$ άρα υπάρχει $x_1 > 1$ τέτοιο ώστε $u(x_1) > 0$.
Η u συνεχής στο $[1, x_1]$ ως σύνθεση, γινόμενο και διαφορά συνεχών και $u(1)u(x_1) < 0$, άρα ισχύει το Θεώρημα Bolzano οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, x_1)$ τέτοιο ώστε:

$$u(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0(\ln x_0 - 2)^2 = 2014 \Leftrightarrow E = 2014$$

Θέμα 3ο

α) Έστω $w(x) = \int_1^x \frac{1}{u} f\left(\frac{x}{u}\right) du$ θέτουμε $t = \frac{x}{u}$ τότε:

$$\begin{cases} u = 1 \Leftrightarrow t = x \\ u = x \Leftrightarrow t = 1 \\ dt = -\frac{1}{u^2}x\,du \Rightarrow du = -\frac{u^2 dt}{x} = -\frac{x^2 dt}{xt^2} = -\frac{x\,dt}{t^2} \end{cases}$$

άρα: $w(x) = \int_1^x \frac{1}{u} f\left(\frac{x}{u}\right) du = \int_x^1 -\frac{t}{x} f(t) \frac{x\,dt}{t^2} = -\int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \Leftrightarrow$

φροντιστήρια πουκαμισάς

$w(x)=\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Αλλά $f(x)=\frac{1}{2x^2}-2\int_1^x \frac{1}{u}f\left(\frac{x}{u}\right)du-\frac{1}{2}=\frac{1}{2x^2}-2w(x)-\frac{1}{2}=$

$\frac{1}{2x^2}-2\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2x^2}-2\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt-\frac{1}{2}$

για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Η $g(t)=\frac{f(t)}{t}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,

άρα η $w(x)=\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Η $\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά και πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Συνεπώς η $f(x)=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}-2w(x)$ παραγωγίσιμη ως διαφορά και γινόμενο παραγωγίσιμων στο $(0,+\infty)$.

Η παράγωγος της f είναι:

$f'(x)=\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}-2w(x)\right)'=-\frac{4x}{4x^4}-2w'(x)=$

$-\frac{1}{x^3}-2\frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^3}-2\frac{f(x)}{x}$

β) Η $g(x)=\ln x+x^2f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα και γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$g'(x)=\left(\ln x+x^2f(x)\right)'=\frac{1}{x}+2xf(x)+x^2f'(x) \Leftrightarrow$

$g'(x)=\frac{1}{x}+2xf(x)+x^2\left(-\frac{1}{x^3}-2\frac{f(x)}{x}\right)=\frac{1}{x}+2xf(x)-\frac{1}{x}-2xf(x)=0$

για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Η g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ άρα συνεχής σε αυτό, με $g'(x)=0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ συνεπώς από συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής η g σταθερή στο $(0,+\infty)$ δηλαδή $g(x)=c$

γ) Για x=1 στην προηγούμενη σχέση έχουμε: $g(1)=c \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(1)=c \overset{(1)}{\Leftrightarrow} c=0$

τελικά $g(x)=0 \Leftrightarrow \ln x + x^2 f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

δ) Επειδή $t\in(0,1)$ το ζητούμενο εμβαδόν θα δίνεται από την σχέση

$$\Omega(t)=\int_t^1 |f(x)|dx \overset{f(x)>0,x\in(0,1)}{=} \int_t^1 f(x)dx=\int_t^1 -\frac{\ln x}{x^2}dx=\int_1^t \frac{\ln x}{x^2}dx$$

θέτουμε $\ln x = u \Leftrightarrow x=e^u$ τότε: $\begin{cases} x=1 \Leftrightarrow u=0 \\ x=t \Leftrightarrow u=\ln t \\ \dfrac{dx}{x}=du \end{cases}$

$$\Omega(t)=\int_1^t \frac{\ln x}{x^2}dx=\int_0^{\ln t}\frac{u}{e^u}du=\int_0^{\ln t} ue^{-u}du=\left[-ue^{-u}\right]_0^{\ln t}+\int_0^{\ln t} e^{-u}du=$$

$$-\ln t e^{-\ln t}+\left[-e^{-u}\right]_0^{\ln t}=\frac{-\ln t}{t}-\frac{1}{t}+1=-\frac{\ln t+1}{t}+1$$

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν:
Γ.Ανδρουλιδάκης, Μ.Βυνιχάκης, Α.Δουλγεράκης, Η.Μαργαρίτη, Μ.Μπαρμπούνη, Α.Τσιλιφώνης.