ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία σελ. 251 από το σχολικό

Β. Θεωρία σελ. 246 από το σχολικό

Γ. α. Λ **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Σ **ε.** Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$

Άρα $f'(x) < 0$ στο $(0,2)$ και $f'(x) > 0$ στα $(-\infty,0)$ και $(2,+\infty)$.

Οπότε f γν.αύξ. στα $(-\infty,0]$ και $[2,+\infty)$ και f γν.φθίν. στο $[0,2]$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 0$ το $f(0) = 1$

και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 2$ το $f(2) = -3$.

β. Αφού f γν.αύξ. στο $A_1 = (-\infty,0]$, τότε $f(A_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty,1]$

Αφού f γν.φθίν. στο $A_2 = (0,2]$, τότε $f(A_2) = [f(2), f(0)) = [-3,1)$

Αφού f γν.αύξ. στο $A_3 = (2,+\infty)$, τότε $f(A_3) = \left(f(2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-3, +\infty)$

$\left(\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 - 3x^2 + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 - 3x^2 + 1) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty\right)$

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \mathbb{R}$

γ. $3 - 3x^2 = -x^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -2$

- Αφού $f(A_1) = (-\infty,1]$ και $-2 \in f(A_1)$, τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-\infty,0)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = -2$ και αφού f γν.αύξ. στο A_1, τότε το x_1 θα είναι μοναδικό, στο A_1
- Αφού $f(A_2) = [-3,1)$ και $-2 \in f(A_2)$, τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = -2$ και αφού f γν.φθίν. στο A_2 τότε το x_2 θα είναι μοναδικό

στο A_2

- Αφού $f(A_3) = (-3, +\infty)$ και $-2 \in f(A_3)$ τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_3 \in (2, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_3) = -2$ και αφού f γν.αύξ. στο A_3 τότε το x_3 θα είναι μοναδικό στο A_3

  Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = -2$ έχει 3 ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$

δ. Είναι $(3x-2)^3 - (2x+3)^3 < 3(3x-2)^2 - 3(2x+3)^2 \Leftrightarrow$

$(3x-2)^3 - 3(3x-2)^2 + 1 < (2x+3)^3 - 3(2x+3)^2 + 1 \Leftrightarrow f(3x-2) < f(2x+3)$

και αφού f γν.αύξ. στο $[2, +\infty)$ τότε $3x - 2 < 2x + 3 \Leftrightarrow x < 5$

Τελικά η ανίσωση αληθεύει για $x \in [2, 5)$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (αφού είναι παραγωγίσιμη) άρα και στο $x_0 = 0$.

Δηλ. ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Αρκεί να βρούμε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x)}{\eta\mu 2x}$ για x κοντά στο 0, οπότε : $f(x) = g(x)\eta\mu 2x$ και

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 5$. Επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\eta\mu 2x\right) = 5\cdot 0 = 0$

Άρα $f(0) = 0$. Επίσης:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot\eta\mu 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\left[2g(x)\frac{\eta\mu 2x}{2x}\right] = 2\cdot 5\cdot 1 = 10$$

Άρα $f'(0) = 10$ ($\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{2x} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u} = 1$, με $u = 2x$)

Τελικά η εφαπτομένη της C_f στο $(0, f(0))$ θα έχει εξίσωση

$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = 10x$

φροντιστήρια πουκαμισάς

β. Έστω ότι η $f'(x)=0$ έχει δύο ρίζες στο $(0,2)$ τις ρ_1,ρ_2 (με $\rho_1<\rho_2$, ομοίως αν $\rho_1>\rho_2$)

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(\rho_1,\rho_2)\subset(0,2)$ (f : δύο φορές παραγωγίσιμη)

Η f' είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]\subset[0,2]$ (f': παραγωγίσιμη).

$f'(\rho_1)=f'(\rho_2)$. Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για την f' στο $[\rho_1,\rho_2]$, άρα υπάρχει x_0 στο (ρ_1,ρ_2), ώστε $f''(x_0)=0$

Άτοπο. Άρα η $f'(x)=0$ έχει μία το πολύ ρίζα στο $(0,2)$

γ. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=f(x)+x-2$ στο $[0,2]$

Η g είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως πράξεις συνεχών.

$$\left.\begin{array}{r} g(0)=f(0)+0-2=0+0-2=-2<0 \\ g(2)=f(2)+2-2=2>0 \end{array}\right\} g(0)\cdot g(2)<0$$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Bolzano για την g στο $[0,2]$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε:

$g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)+\xi-2=0 \Leftrightarrow f(\xi)=2-\xi$

δ. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,\xi]$ και $[\xi,2]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0,\xi)$ και $(\xi,2)$

Επομένως από Θ.Μ.Τ. θα υπάρχουν:

$\kappa\in(0,\xi)$ τέτοιο ώστε $f'(\kappa)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\dfrac{2-\xi-0}{\xi}\Leftrightarrow f'(\kappa)=\dfrac{2-\xi}{\xi}$ και

$\lambda\in(\xi,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\lambda)=\dfrac{f(2)-f(\xi)}{2-\xi}=\dfrac{2-(2-\xi)}{2-\xi}\Leftrightarrow f'(\lambda)=\dfrac{\xi}{2-\xi}$

Άρα $f'(\kappa)\cdot f'(\lambda)=\dfrac{2-\xi}{\xi}\cdot\dfrac{\xi}{2-\xi}=1$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$g'(x)=\frac{-1}{f^2(x)}\cdot f'(x)-4x^3=\frac{4x^3f^2(x)}{f^2(x)}-4x^3=0$$

Άρα $g(x)=c, x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}$

β. Είναι $g(0)=c \Leftrightarrow \frac{1}{f(0)}-0=c \Leftrightarrow c=1$. Άρα $g(x)=1, x\in\mathbb{R}$

Δηλ. $\frac{1}{f(x)}-x^4=1 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x^4+1}, x\in\mathbb{R}$

γ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3f(x)\cdot \eta\mu x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^4+1}\cdot \eta\mu x\right)=0$, αφού (για $x\to+\infty$ είναι $\frac{x^3}{x^4+1}>0$)

$$-1\le \eta\mu x\le 1 \Leftrightarrow \frac{-x^3}{x^4+1}\le \frac{x^3}{x^4+1}\cdot \eta\mu x\le \frac{x^3}{x^4+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{x^4+1}=0=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^4+1}$$

Οπότε από κριτ. παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^4+1}\cdot \eta\mu x\right)=0$

δ. Για $\alpha=\beta$ ισχύει ως ισότητα. Για $\alpha\ne\beta$ έστω ότι $\alpha<\beta$

Είναι h συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

h παραγωγίσιμη στο (α,β)

Από Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε:

$$h'(\xi)=\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow 2\xi^2f(\xi)=\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow \frac{2\xi^2}{1+\xi^4}=\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Όμως $\left|\frac{2\xi^2}{1+\xi^4}\right|\le 1 \Leftrightarrow \frac{2\xi^2}{1+\xi^4}\le 1 \Leftrightarrow 1+\xi^4\ge 2\xi^2 \Leftrightarrow 1+\xi^4-2\xi^2\ge 0 \Leftrightarrow (1-\xi^2)^2\ge 0$

που ισχύει. Άρα $\left|\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}\right|\le 1 \Leftrightarrow |h(\beta)-h(\alpha)|\le|\beta-\alpha|$

Συνεπώς ισχύει για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

φροντιστήρια πουκαμισάς

φροντιστήρια πουκαμισάς