ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**
ΣΕΙΡΑ:	
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α₁. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ.
Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 10

Α₂. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού και να γράψετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 5

Α₃. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0

β. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 εσωτερικό ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της, αν $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

γ. Ισχύει ότι $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, a > 0$

δ. Αν $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό ενός διαστήματος Δ του πεδίου ορισμού της f, τότε $f(x) = c$ σε όλο το Δ.

ε. Αν f γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε $f'(x) > 0, x \in \Delta$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \ell nx + \beta$ $a,\beta \in \mathbb{R}$. Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της $(1, f(1))$ είναι η ευθεία $y = 3x - 3$

Β₁. Να δείξετε ότι $a = 1$, $\beta = -1$ **Μονάδες 6**

Β₂. Για $a = 1$, $\beta = -1$ να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Β₃. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρείτε το πρόσημο της f(x) **Μονάδες 3**

Β₄. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{x^3}{3} + x\ell nx - 2x$ ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

φροντιστήρια πουκαμισάς

Β5. Να λύσετε την ανίσωση $f\left(2e^{x}-2x\right)-f\left(x^{2}+2\right)>0$ **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot f(x)+\eta\mu x\cdot\eta\mu 3x}{x^{2}}=4$ και $f'(1)=5$, $f'(2)=-9$ και $f(2)=6$

Γ1. Βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(0,f(0))$ **Μονάδες 6**

Γ2. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$, τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=e^{-2\xi}$

Μονάδες 4

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)+2f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,2)$

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει $\kappa\in(0,2)$ ώστε $f(\kappa)=3$ **Μονάδες 4**

Γ5. Να δείξετε ότι υπάρχουν x_1,x_2 διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε:

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=\frac{2}{3}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, με $f(0)=f'(0)=0$ και για την οποία ισχύει: $f''(x)>2f'(x)$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$. Να δείξετε ότι:

Δ1. Η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $g(x)=f(x)\cdot e^{-2x}$ είναι γνησίως αύξουσα

Μονάδες 7

Δ2. Ισχύει $f(x)>0$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$ **Μονάδες 4**

Δ3. Αν $\varphi(x)=f^{2}(x)$, τότε η $\varphi'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα. **Μονάδες 5**

Δ4. Ισχύει $f(2)<\dfrac{f(4)}{\sqrt{2}}$ **Μονάδες 5**

Δ5. $f(x)>(x-2)f'(2)+f(2)$ για $x>2$ **Μονάδες 4**