ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1 Θεωρία σελ. 253 σχολικού

A_2 Θεωρία σελ. 246 σχολικού

A_3 α. Σ β. Λ γ. Σ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B_1 Η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=2\alpha x+\frac{1}{x}$ και $f'(1)=2\alpha+1, f(1)=\alpha+\beta$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $(1,f(1))$ είναι:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow$

$y-(\alpha+\beta)=(2\alpha+1)(x-1)\Leftrightarrow$

$y=(2\alpha+1)x-2\alpha-1+\alpha+\beta\Leftrightarrow$

$y=(2\alpha+1)x-\alpha-1+\beta$

Αφού συμπίπτει με την $y=3x-3$ έχουμε:

$$\begin{matrix}2\alpha+1=3\\-\alpha-1+\beta=-3\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\alpha=1\\\beta=-1\end{matrix}$$

B_2 Με $\alpha=1,\beta=-1$ $f(x)=x^2+\ln x-1$

$f'(x)=2x+\frac{1}{x}>0$ οπότε η f γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα.

Επίσης η f γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Έτσι $f(A)=(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)$ αφού

$\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+\ln x-1)=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

B_3 Είναι $f(1)=1+\ln1-1=0$ έτσι μια ρίζα της f είναι η $x=1$ που είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για $x<1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(1)\Leftrightarrow f(x)<0$

Για $x>1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>0$

B_4 Η g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$g'(x)=\frac{3x^2}{3}+(x)'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'-2=$

$x^2+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-2=$

$x^2+\ln x-1=f(x)$

Όμως από (γ) ερώτημα για $x<1$ είναι $f(x)<0$ έτσι $g'(x)<0$

Ενώ για $x>1$ είναι $f(x)>0$ έτσι $g'(x)>0$ οπότε η g γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, ενώ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ το

$g(1)=\frac{1}{3}-2=-\frac{5}{3}$.

φροντιστήρια πουκαμισάς

B₅ Είναι $f(2e^x-2x)-f(x^2+2)>0 \Leftrightarrow$

$$f(2e^x-2x)>f(x^2+2) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$$

$$2e^x-2x>x^2+2 \Leftrightarrow$$

$$2e^x-x^2-2x-2>0 \quad (1)$$

Θεωρούμε την $h(x)=2e^x-x^2-2x-2,\ x\geq 0$

Παραγωγίσιμη με $h'(x)=2e^x-2x-2$ και $h'(0)=0$

$h''(x)=2e^x-2$

$h''(x)=0 \Leftrightarrow 2e^x-2=0 \Leftrightarrow x=0$

$h''(x)>0 \Leftrightarrow 2e^x-2>0 \Leftrightarrow x>0$

Άρα η $h'\nearrow$ στο $[0,+\infty)$ οπότε $h(x)>h(0) \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} x>0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁ Θέτουμε $\dfrac{xf(x)+\eta\mu x\cdot\eta\mu 3x}{x^2}=g(x)$ με $\lim g(x)=4$ τότε

$$xf(x)=g(x)x^2-\eta\mu x\cdot\eta\mu 3x \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x)=\frac{g(x)x^2}{x}-\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu 3x \Leftrightarrow$$

$$f(x)=g(x)\cdot x-\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu 3x$$

Έτσι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\cdot x-\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu 3x\right)=4\cdot 0-0=0$

Οπότε $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ αφού η f συνεχής ως παραγωγίσιμη.

Επίσης $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)x^2}{x^2}-\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{\eta\mu 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0} g(x)-\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{3\eta\mu 3x}{3x}=4-1\cdot 3=1$

Άρα η εξ. εφαπτομένη στο $M(0,f(0))$ είναι

$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=x$

Γ₂ Θεωρούμε την $g(x)=f'(x)-e^{-2x}$ που είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως διαφορά συνεχών και

$g(1)=f'(1)-e^{-2}=5-\dfrac{1}{e^2}>0$

$g(2)=f'(2)-e^{-4}=-9-e^{-4}<0$

Έτσι: $g(1)\cdot g(2)<0$ και από Θεώρημα Bolzano υπάρχει

$\xi\in(1,2): g(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)-e^{-2\xi}=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=e^{-2\xi}$

Γ₃ $f''(x)+2f'(x)=0 \Leftrightarrow (f'(x))'+(2x)'\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$(f'(x))'\cdot e^{2x}+e^{2x}\cdot(2x)'\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$(f'(x)e^{2x})=0$

φροντιστήρια πουκαμισάς

Θεωρούμε την $h(x) = f'(x)e^{2x}$ που είναι συνεχής στο $[0,\xi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\xi)$ με:

$h'(x) = f'(x)e^{2x} + f'(x)e^{2x} \cdot 2$

$h(0) = f'(0) \cdot e^2 = 1$

$h(\xi) = f'(\xi)e^{2\xi} \overset{(ii)}{=} e^{-2\xi} \cdot e^{2\xi} = e^0 = 1$

Έτσι από Θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0 \in (0,\xi) \subseteq (0,2)$ τέτοιο ώστε:

$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f''(x_0)e^{2x_0} + f'(x_0)e^{2x_0} \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow$

$f''(x_0) + 2f'(x_0) = 0$

Γ4 Η f συνεχής στο $[0,2]$ και $f(0) \neq f(2)$

Το $3 \in [f(0), f(2)] = [0,6]$ έτσι από Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $\kappa \in (0,2) : f(\kappa) = 3$

Γ5 Η f συνεχής στα $[0,\kappa]$ $[\kappa,2]$ και παραγωγίσιμη στα $(0,\kappa)$ $(\kappa,2)$

Έτσι από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχουν $x_1 \in (0,\kappa)$ και $x_2 \in (\kappa,2)$:

$f'(x_1) = \dfrac{f(\kappa) - f(0)}{\kappa - 0} = \dfrac{3}{\kappa} \Leftrightarrow \dfrac{1}{f'(x_1)} = \dfrac{\kappa}{3}$ και

$f(x_2) = \dfrac{f(2) - f(\kappa)}{2 - \kappa} = \dfrac{6-3}{2-\kappa} = \dfrac{3}{2-\kappa}$

Οπότε $\dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} = \dfrac{\kappa}{3} + \dfrac{2-\kappa}{3} = \dfrac{\kappa + 2 - \kappa}{3} = \dfrac{2}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 $f''(x) > 2f'(x) \Leftrightarrow f''(x) - 2f'(x) > 0 \Leftrightarrow (f(x) - 2f(x))' > 0$

Θεωρούμε την $h(x) = f'(x) - 2f(x)$ με $h'(x) > 0$

Άρα η $h(x)$ γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Έτσι για $x > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 2f(x)$ (1)

Αλλά $g'(x) = f'(x)e^{-2x} - f(x)2e^{-2x} =$

$e^{-2x}(f'(x) - 2f(x)) > 0$

Από (1) η $g(x)$ γνησίως αύξουσα.

Δ2 Αφού $g(x)$ γνησίως αύξουσα τότε για $x > 0$ είναι

$g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x)e^{-2x} > f(0)e^0 \Leftrightarrow$

$f(x)e^{-2x} > 0 \overset{e^{-2x}>0}{\Leftrightarrow} f(x) > 0$

Δ3 Ισχύει $f''(x) > 2f'(x)$ άρα $f''(x) > f'(x)$ και $f'(x) > 2f(x)$ άρα $f'(x) > f(x)$

Έτσι $f''(x) > f'(x) > f(x) > 0$ (2)

Αλλά η $\varphi(x)$ δυο φορές παραγωγίσιμη με:

$\varphi'(x) = (f^2(x))' = 2f(x) \cdot f'(x)$ και

$\varphi''(x) = (2f(x) \cdot f'(x))' = 2f'(x) \cdot f'(x) + 2f(x) \cdot f''(x) > 0$ (από 2)

Οπότε φ' γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

φροντιστήρια πουκαμισάς

Δ4 $f(2) < \frac{f(4)}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow f^2(2) < \frac{f^2(4)}{2} \Leftrightarrow$

$2f^2(2) < f^2(4) \Leftrightarrow f^2(2) - f^2(0) < f^2(4) - f^2(2) \Leftrightarrow$

$\frac{f^2(2) - f^2(0)}{2-0} < \frac{f^2(4) - f^2(2)}{4-2}$ (3)

Όμως η $(f^2)'$ γνησίως αύξουσα.

Από Θεώρημα Μέσης Τιμής στα $[0,2],[2,4]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (0,2)$ και $\xi_2 \in (2,4)$ τέτοια ώστε:

$(f^2)'(\xi_1) = \frac{f^2(2) - f^2(0)}{2-0}$ και $(f^2)'(\xi_2) = \frac{f^2(4) - f^2(2)}{4-2}$

Οπότε $\xi_1 < \xi_2 \overset{(f^2)'\nearrow}{\Leftrightarrow} (f^2)'(\xi_1) < (f^2)'(\xi_2)$

Δ5 Ισχύει $f''(x) > f'(x) > f(x) > 0$ οπότε η f' γνησίως αύξουσα.

Για την f ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[2,x]$ αφού είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σ' αυτό. Έτσι υπάρχει $\xi \in (2,x)$ τέτοιο ώστε:

$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$

Οπότε: $2 < \xi \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(2) < f'(\xi) \Leftrightarrow$

$f'(2) < \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \Leftrightarrow$

$f(x) - f(2) > (x-2) \cdot f'(2) \Leftrightarrow$

$f(x) > (x-2) \cdot f'(2) + f(2)$

φροντιστήρια πουκαμισάς