ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1. Θεωρία σελ. 167 σχολ. **A_2.** Θεωρία σελ. 169 σχολ. **A_3.** Θεωρία σελ. 191 σχολ.

A_4. **α.** Λ, **β.** Σ, **γ.** Λ, **δ.** Σ, **ε.** Σ

ΘΕΜΑ Β

B_1. Είναι $\left|\frac{4\eta\mu(x+1)}{x+1}\right| \le \frac{4}{|x+1|}$ οπότε $\frac{-4}{|x+1|} \le \frac{4\eta\mu(x+1)}{x+1} \le \frac{4}{|x+1|}$

Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4}{|x+1|}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{|x+1|}=0$

Έτσι από κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4\eta\mu(x+1)}{x+1}=0$

B_2. Αφού η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x_0=-1$. Έτσι

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=f(-1)=\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

Για το $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{4\eta\mu(x+1)}{x+1}$, θέτουμε $u=x+1$, τότε $u_0=\lim\limits_{x\to-1^-}(x+1)=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{4\eta\mu(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{u\to0}\frac{4\eta\mu u}{u}=4\cdot1=4$ και

$f(-1)=\sqrt{(-1)^2-3(-1)}+\sqrt{a(-1)^2+3}=\sqrt{1+3}+\sqrt{a+3}=2+\sqrt{a+3}$

Έτσι $f(-1)=\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)\Leftrightarrow 2+\sqrt{a+3}=4\Leftrightarrow\sqrt{a+3}=2\Leftrightarrow a+3=4\Leftrightarrow a=1$

B_3. Με $a=1$ η $f(x)=\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+3}$ για $x\ge-1$

Έτσι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+3}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}}+|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x}\overset{|x|=x}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)}{x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)=1+1=2$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$

φροντιστήρια πουκαμισάς

Β4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+3}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-x+\sqrt{x^2+3}-x\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-3x}+x\right)}{\sqrt{x^2-3x}+x}+\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}{\sqrt{x^2+3}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x-x^2}{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}}+x}+\frac{x^2+3-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+x}\overset{|x|=x}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1\right)}+\frac{3}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1}+\frac{1}{x}\cdot\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{-3}{2}+0=-\frac{3}{2}\text{ , αφού }\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2-3x}$ με $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$, τότε:

$x^2+\alpha x+\beta=f(x)\left(x^2-3x\right)$ για $x\neq0$, $x\neq3$

Έτσι $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+\alpha x+\beta\right)=\lim\limits_{x\to0}f(x)(x^2-3x)\Leftrightarrow\beta=(-1)(0-0)\Leftrightarrow\beta=0$

Όμως $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+\alpha x}{x^2-3x}=-1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x+\alpha)}{x(x-3)}=-1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\alpha}{x-3}=-1\Leftrightarrow$

$\dfrac{\alpha}{-3}=-1\Leftrightarrow\alpha=3$

Γ2. Για $x\neq0$, $x\neq1$ θέτουμε $h(x)=\dfrac{g(x)\eta\mu^2x}{x^3-x^2}$ με $\lim\limits_{x\to0}h(x)=-\infty$, τότε έχουμε:

$$g(x)\cdot\eta\mu^2x=h(x)\cdot\left(x^3-x^2\right)\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow}g(x)=\frac{h(x)\left(x^3-x^2\right)}{\eta\mu^2x}\Leftrightarrow g(x)=\frac{h(x)x^2\cdot(x-1)}{\eta\mu^2x}\Leftrightarrow$$

$$g(x)=\frac{h(x)(x-1)}{\frac{\eta\mu^2x}{x^2}}$$

Όμως $\lim\limits_{x\to0}h(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0}(x-1)=-1$ και $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2=1$. Έτσι $\lim\limits_{x\to0}g(x)=+\infty$

Γ3. Διαιρούμε με $x^2\neq0$, έτσι:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)+1-\sigma\upsilon\nu x}{\frac{2x^2}{g(x)}+x\cdot\eta\mu2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2f(x)}{x^2}+\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2\cdot g(x)}+\frac{x\eta\mu2x}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}{\frac{2}{g(x)}+\frac{\eta\mu2x}{x}}=\frac{-1+\frac{1}{2}}{0+2}=-\frac{1}{4}$$

φροντιστήρια πουκαμισάς

Αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{x^2\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{g(x)} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ και

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\eta\mu 2x}{2x} \underset{\substack{\text{ΟΤΑΝ } x\to 0\\ u\to 0}}{\overset{\text{ΘΕΤΩ } u=2x}{=}} \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{\eta\mu u}{u} = 2\cdot 1 = 2$$

Γ4. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\lambda^2+2)g^3(3)f^2(x)+g^2(x)f(x)-2012g(x)}{\lambda g^3(x)+6f^2(x)g^2(x)+1963g(x)} = -3$

Οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g^3(x)\left[(\lambda^2+2)f^2(x)+\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{2012}{g^2(x)}\right]}{g^3(x)\left[\lambda+\frac{6f^2(x)}{g(x)}+\frac{1963}{g^2(x)}\right]} = -3 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(\lambda^2+2)f^2(x)+\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{2012}{g^2(x)}}{\lambda+\frac{6f^2(x)}{g(x)}+\frac{1963}{g^2(x)}} = -3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\lambda^2+2)(-1)^2+0-0}{\lambda+0+0} = -3 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2+2}{\lambda} = -3 \Leftrightarrow \lambda^2+2 = -3\lambda \Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda+2 = 0 \Leftrightarrow$$

$(\lambda+1)(\lambda+2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ ή $\lambda = -2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x \neq 1$ έχουμε: $\dfrac{f^3(x)}{(x-1)^3}+\dfrac{f^2(x)\eta\mu(1-x)}{(x-1)^3} = \dfrac{4(x-1)^2\eta\mu(x-1)}{(x-1)^3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x-1}\right)^3 - \left(\frac{f(x)}{(x-1)}\right)^2\cdot\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} = \frac{4\eta\mu(x-1)}{x-1}, \quad (1)$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u} = 1$ όπου, θέτουμε $u = x-1$ τότε $u_0 = \lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$ και

αφού $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1} = \kappa$, τότε $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)}{x-1}\right)^2 = \kappa^2$ και $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)}{x-1}\right)^3 = \kappa^3$

Έτσι από την (1) έχουμε:

$\kappa^3-\kappa^2 = 4 \Leftrightarrow \kappa^3-\kappa^2-4 = 0$

Με Horner παίρνουμε $(\kappa-2)(\kappa^2+\kappa+2) = 0 \Leftrightarrow \kappa-2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2$, αφού η

$\kappa^2+\kappa+2 > 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ επειδή $\Delta = -7 < 0$

Δ2. Θέτουμε $h(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$ με $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=2$ (από **Δ1**. ερώτημα), έτσι:

$f(x)=h(x)(x-1)$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}h(x)(x-1)=2\cdot 0=0$

Δ3. **i)** Είναι $|g(x)-3|\le|f(x)|\Leftrightarrow -|f(x)|\le g(x)-3\le|f(x)|$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 1}\left(-|f(x)|\right)=\lim\limits_{x\to 1}|f(x)|=0$ (από **Δ2.** ερώτημα), έτσι από κριτήριο παρεμβολής ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\left[g(x)-3\right]=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}g(x)=3$

ii) Αφού $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=3$, τότε:

$\lim\limits_{x\to 1}\left(g^2(x)-5g(x)\right)=-6<0$, άρα $g^2(x)-5g(x)<0$ για x "κοντά" στο $x_0=1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\left(g(x)-2\right)=1>0$. Άρα $g(x)-2>0$ για x κοντά στο $x_0=1$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 1}\frac{|g(x)-2|-|g^2(x)-5g(x)|+5}{\sqrt{g(x)+1}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2-\left(-g^2(x)+5g(x)\right)+5}{\sqrt{g(x)+1}-2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(g(x)-2+g^2(x)-5(x)+5\right)\left(\sqrt{g(x)+1}+2\right)}{\left(\sqrt{g(x)+1}-2\right)\left(\sqrt{g(x)+1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(g^2(x)-4g(x)+3\right)\left(\sqrt{g(x)+1}+2\right)}{g(x)+1-4}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(g(x)-3)(g(x)-1)\left(\sqrt{g(x)+1}+2\right)}{g(x)-3}=$$

$$=\lim_{x\to 1}(g(x)-1)\cdot\left(\sqrt{g(x)+1}+2\right)=(3-1)\cdot(2+2)=8.$$