ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**
ΣΕΙΡΑ:	
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	

ΘΕΜΑ Α

Α₁. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β)

Μονάδες 10

Α₂. Πότε μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 5

Α₃. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν η f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε $f''(x)<0, x\in\Delta$

β. Αν η f είναι κυρτή σε διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε x εσωτερικό του Δ είναι κάτω από την C_f

γ. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης f δεν είναι απαραίτητα ολικό μέγιστο της f

δ. Αν f γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ και f παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, τότε $f'(x)>0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ.

ε. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0, τότε $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1+\ell nx}{e^x}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}-1-\ell nx$ με $x>0$

Β₁. Να μελετήσετε τη μονοτονία και την κυρτότητα της g. **Μονάδες 5**

Β₂. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 7**

Β₃. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$f(x)=\frac{1}{e^2}$$

Μονάδες 8

Β₄. Να δείξετε ότι $f\left(x^2+2013\right)>f\left(x^2+2014\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

$g(x)\geq -2x+2$ για κάθε $x>0$

Μονάδες 5

φροντιστήρια πουκαμισάς

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τρεις φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot f(x)-\sqrt{x^2+4}+2}{x^2}=\dfrac{7}{4}$ και η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(4,f(4))$ είναι $y=-6x+30$

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $(0,f(0))$ **Μονάδες 6**

Γ2. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,4)$, τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=-2$ **Μονάδες 4**

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)+x\,f'''(x)+2=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,4)$

Μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,4)$, τέτοιο, ώστε $f(x_0)=3$ **Μονάδες 5**

Γ5. Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,4)$ με $\xi_1\neq\xi_2$, τέτοια, ώστε: $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{4}{3}$ **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη με $f(1)=e-\lambda$ και $f'(x)=\ell nx+1-\lambda$ και $\lambda>0$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=x\ell nx-\lambda x+e$ **Μονάδες 6**

Δ2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f **Μονάδες 5**

Δ3. Να δείξετε ότι η μεγαλύτερη τιμή του λ, ώστε: $x\ell nx\geq\lambda x-e$ για κάθε $x>0$ είναι η $\lambda=2$

Μονάδες 5

Δ4. Να δείξετε ότι:

α) $2f(2)<f(3)+f(1)$ **Μονάδες 4**

β) Αν για την τιμή του λ του ερωτήματος $Δ_3$ ισχύει: $f(x)-e+ax^2\leq-5x+3+a$, για κάθε $x>0$, να δείξετε ότι $a=-2$

Μονάδες 5

φροντιστήρια πουκαμισάς