ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Θεωρία σελ. 262 σχολικού
Α.2 Θεωρία σελ. 258σχολικού
Α.3 α. Λ β. Σ γ. Σ δ. Λ ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β$_1$ Είναι g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<0$ και $g''(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}>0$

Άρα γνησίως φθίνουσα και κυρτή στο $(0+\infty)$.

Β$_2$ Είναι f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot e^x-(1+\ln x)e^x}{e^{2x}}=\frac{\frac{1}{x}-1-\ln x}{e^x}=\frac{g(x)}{e^x}$$

Είναι g $\searrow$ στο $(0,+\infty)$ με $g(1)=0$

Οπότε $g(x)>0$ στο $(0,1)$

Και $g(x)<0$ στο $(1,+\infty)$

Άρα $f'(x)>0$ στο $(0,1)$ και $f'(x)<0$ στο $(1,+\infty)$

Δηλ. f $\nearrow$ στο $A_1=(0,1]$

f $\searrow$ στο $A_2=[1,+\infty)$

Παρουσιάζει μέγιστο στο $x=1$ το $f(1)=\frac{1}{e}$

Β$_3$ Αφού f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=(0,1]$

Τότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1+\ln x}{e^x}\right)=-\infty$

Επίσης f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=[1,+\infty)$

Οπότε $f(A_2)=f([1,+\infty))=(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),f(1)]=(0,\frac{1}{e}]$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{e^1}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cdot e^x}=0$

Τελικά το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A_1)\cup f(A_2)=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$

Το $\frac{1}{e^2}$ ανήκει στο $f(A_1)$ και f συνεχής στο A_1 οπότε θα υπάρχει $x_1\in(0,1)$ ώστε

$f(x_1)=\frac{1}{e^2}$ και μάλιστα μοναδικό αφού f $\nearrow$ στο A_1.

φροντιστήρια πουκαμισάς

Ομοίως $\frac{1}{e^2}$ ανήκει στο $f(A_2)$ και f συνεχής στο A_2, οπότε θα υπάρχει $x_2 \in (1,+\infty)$ ώστε $f(x_2)=\frac{1}{e^2}$ και μάλιστα μοναδικό αφού $f \searrow$ στο A_2.

Τελικά η $f(x)=\frac{1}{e^2}$ θα έχει 2 ακριβώς ρίζες στο $(0,+\infty)$.

B₄ Είναι $1<x^2+2013<x^2+2014$ και $f \searrow$ στο $(1,+\infty)$

Οπότε $f(x^2+2013)>f(x^2+2014)$

Η εφαπτομένη της C_g στο -1 είναι

$y-g(1)=g'(1)(x-1)$ δηλ. $y-0=-2(x-1)$

δηλ. ε: $y=-2x+2$

και g κυρτή στο $(0,+\infty)$

Άρα η C_g θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής όπου θα συμπίπτουν, δηλ.: $g(x)\geq -2x+2, x>0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁ Θέτω $\frac{xf(x)-\sqrt{x^2+4}+2}{x^2}=g(x)$ με $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\frac{7}{4}$

Τότε $xf(x)=g(x)\cdot x^2+\sqrt{x^2+4}-2 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$$f(x)=g(x)\cdot x+\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}[g(x)\cdot x+\frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2}{x\cdot(\sqrt{x^2+4}+2)}]=$

$$\lim_{x\to 0}[g(x)\cdot x+\frac{x^2+4-4}{x\cdot(\sqrt{x^2+4}+2}]=\lim_{x\to 0}[g(x)\cdot x+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}]=0$$

Επίσης $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{g(x)\cdot x^2}{x^2}+\frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}]=$

$$\lim_{x\to 0}[g(x)+\frac{x^2+4-4}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}]=\lim_{x\to 0}[g(x)+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}]=\frac{7}{4}+\frac{1}{4}=2$$

Άρα $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=2x$

Γ₂ Η f' συνεχής στο $[0,4]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,4)$, έτσι από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi\in(0,4): f''(\xi)=\frac{f'(4)-f'(0)}{4-0}=\frac{-6-2}{4}=-2$

Γ₃ Έχουμε $f''(x)+f'''(x)+2=0\Leftrightarrow (x)'\cdot f''(x)+x(f''(x))'+(2x)'=0\Leftrightarrow (x\cdot f''(x)+2x)'=0$

Θεωρούμε την $h(x)=x\cdot f''(x)+2x$ με $x\in[0,\xi]$ που είναι συνεχής στο $[0,\xi]$,

φροντιστήρια πουκαμισάς

παραγωγίσιμη στο $(0,\xi)$ και $h(0)=0, h(\xi)=\xi\cdot f''(\xi)+2\xi \overset{(\beta)}{=} -2\xi+2\xi=0$

Έτσι από Θεώρημα Rolle υπάρχει
$x_1\in(0,\xi)\subseteq(0,4): h'(x_1)=0 \Leftrightarrow f''(x_1)+x_1\cdot f'''(x_1)+2=0$

Γ₄ Είναι $f(0)=0$ και η εξ. εφαπτ. στο $(4,f(4))$ είναι:
$y-f(4)=f'(4)(x-4) \Leftrightarrow y=f'(4)x-4f'(4)+f(4)$
Όμως η εξίσωση εφαπτομένης στο $x_0=4$ είναι
$y=-6x+30$ έτσι $f'(4)=-6$ και $-4f'(4)+f(4)=30 \Leftrightarrow f(4)=30+4f'(4) \Leftrightarrow f(4)=6$
Η f συνεχής στο $[0,4]$ και $f(0)\neq f(4)$
Το $3\in[f(0),f(4)]=[0,6]$ έτσι από Θ.Ε.Τ. υπάρχει $x_0\in(0,4): f(x_0)=3$

Γ₅ Η f συνεχής στα $[0,x_0],[x_0,4]$ και παραγωγίσιμη στα $(0,x_0),(x_0,4)$
Έτσι από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1\in(0,x_0)$ και $\xi_2\in(x_0,4)$

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}=\frac{3}{x_0} \quad \text{έτσι} \quad \frac{1}{f'(\xi_1)}=\frac{x_0}{3}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(4)-f(x_0)}{4-x_0}=\frac{6-3}{4-x_0}=\frac{3}{4-x_0}$$

Άρα $\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{4-x_0}{3}$

Οπότε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{x_0}{3}+\dfrac{4-x_0}{3}=\dfrac{x_0+4-x_0}{3}=\dfrac{4}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁ $f'(x)=\ln x+1-\lambda \Leftrightarrow$
$f'(x)=(x)'\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-\lambda \Leftrightarrow$
$f'(x)=(x)'\ln x+x\cdot(\ln x)'-(\lambda x)' \Leftrightarrow$
$f'(x)=(x\ln x-\lambda x)'$
Άρα $f(x)=x\ln x-\lambda x+C$
Για $x=1$: $f(1)=-\lambda+C$ και $f(1)=e-\lambda$
Άρα $C=e$
Έτσι $f(x)=x\ln x-\lambda x+e$

Δ₂ Είναι $f'(x)=\ln x+1-\lambda$
$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1-\lambda=0$
$\ln x=\lambda-1 \Leftrightarrow x=e^{\lambda-1}$
$f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x>\lambda-1 \Leftrightarrow x>e^{\lambda-1}$ και
$f'(x)<0 \Leftrightarrow \ln x<\lambda-1 \Leftrightarrow x<e^{\lambda-1}$
Άρα $f\searrow$ στο $(0,e^{\lambda-1}]$ και $f\nearrow$ στο $[e^{\lambda-1},+\infty)$

Έτσι η f παρουσιάζει ελάχιστο για:

$x = e^{\lambda-1}$ το $f(e^{\lambda-1}) = e^{\lambda-1}\cdot \ln e^{\lambda-1} - \lambda e^{\lambda-1} + e = e^{\lambda-1}\cdot(\lambda-1)\ln e - \lambda e^{\lambda-1} + e =$

$\lambda e^{\lambda-1} - e^{\lambda-1} - \lambda e^{\lambda-1} + e = e - e^{\lambda-1}$

Δ3 $x\ln x \geq \lambda x - e, x > 0 \Leftrightarrow x\ln x - \lambda x + e \geq 0, x > 0 \Leftrightarrow$

$f(x) \geq 0, x > 0 \Leftrightarrow \min f(x) \geq 0 \Leftrightarrow$

$e - e^{\lambda-1} \geq 0 \Leftrightarrow e \geq e^{\lambda-1} \Leftrightarrow e' \geq e'^{\lambda-1} \Leftrightarrow$

$1 \geq \lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda \leq 2$

Άρα η μεγαλύτερη τιμή του λ ώστε $x\ln x \geq \lambda x - e$ είναι η $\lambda = 2$

Δ4 α. $2f(2) < f(3) + f(1) \Leftrightarrow$

$f(2) - f(1) < f(3) - f(2) \Leftrightarrow$

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} < \frac{f(3)-f(2)}{3-2} \quad (1)$$

Όμως η f συνεχής στα $[1,2]$ και $[2,3]$ και παραγωγίσιμη στα $(1,2),(2,3)$.

Έτσι από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχουν $\xi_1 \in (1,2)$ και $\xi_2 \in (2,3)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2}$$

Οπότε η (1) γίνεται $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$

Αλλά $f''(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$, έτσι η $f'(x)$ γνησίως αύξουσα και $\xi_1 < \xi_2$ οπότε ισχύει.

β. Για $\lambda = 2$ είναι

$f(x) - e + \alpha x^2 \leq -5x + 3 + \alpha \Leftrightarrow$

$f(x) - e + \alpha x^2 + 5x - \alpha \leq 3 \Leftrightarrow$

$x\ln x - 2x + e - e + \alpha x^2 + 5x - \alpha \leq 3 \Leftrightarrow$

$x\ln x + 3x + \alpha x^2 - \alpha \leq 3$

Θεωρούμε την $g(x) = x\ln x + 3x + \alpha x^2 - \alpha$ με $g(x) \leq 3$

Παρατηρώ ότι $g(1) = 3$

Έτσι $g(x) \leq g(1)$ δηλαδή η g παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ μέγιστο.

Το 1 εσωτερικό σημείο και η g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$g'(x) = \ln x + 1 + 3 + 2\alpha x$

Έτσι από Θεώρημα Fermat ισχύει $g'(1) = 0 \Leftrightarrow \ln 1 + 4 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -4 \Leftrightarrow \alpha = -2$

φροντιστήρια πουκαμισάς