Απαντήσεις

Θέμα 1ο

α) Αφού η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x=0$, άρα

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \quad (1)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (|z+1|x+1) = 1 \quad (2)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (|z|e^x - 1) = |z| - 1 \quad (3)$

$f(0) = 1 \quad (4)$

Από (1), (2), (3), (4) έχουμε: $|z| - 1 = 1 \Leftrightarrow |z| = 2$

β) Είναι: $w = \dfrac{2z+5}{z+1} \Leftrightarrow w(z+1) = 2z+5 \Leftrightarrow wz + w = 2z+5 \Leftrightarrow$

$z = \dfrac{5-w}{w-2}$ αφού $w \neq 2$

γιατί αν $w=2$ από την σχέση $w = \dfrac{2z+5}{z+1}$ έχουμε:

$w = \dfrac{2z+5}{z+1} \Leftrightarrow 2 = \dfrac{2z+5}{z+1} \Leftrightarrow 2z+2 = 2z+5 \Leftrightarrow 2 = 5$ αδύνατο.

Όμως από α) $|z| = 2$ άρα $\left|\dfrac{5-w}{w-2}\right| = 2 \Leftrightarrow$

$|5-w| = 2|w-2| \overset{w=x+yi}{\Leftrightarrow} |5-x-yi| = 2|x+yi-2| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(5-x)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \Leftrightarrow (5-x)^2 + y^2 = 4\left((x-2)^2 + y^2\right) \Leftrightarrow$

$25 - 10x + x^2 + y^2 = 4(x^2 - 4x + 4) + 4y^2 \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2^2$

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι κύκλος με κέντρο $k(1,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$

γ) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[-1,0]$
$f(0)=1>0$ και $f(-1)=1-|z+1|$
Όμως $|z+1|\geq||z|-1|=1$ αφού $|z|=2$, οπότε
$-|z+1|\leq -1 \Leftrightarrow 1-|z+1|\leq 0 \Leftrightarrow f(-1)\leq 0$
Επομένως αν $f(-1)<0$, τότε ισχύει το Θεώρημα Bolzano για την f στο $[-1,0]$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.
Αν $f(-1)=0$, τότε το -1 είναι ρίζα.
Η f παραγωγίσιμη για τα $x<0$ ως πολυωνυμική με
$f'(x)=|z+1|\geq||z|-1|=1$ και αφού η f συνεχής για $x\leq 0$ η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ άρα η ρίζα x_0 μοναδική.

Θέμα 2ο

α) Για $x>0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=2e^{2x}-\frac{\lambda}{x^2},\quad \lambda>0 \text{ άρα}$$

$$h(x)+x^2f'(x)=0 \Leftrightarrow h(x)+x^2\left(2e^{2x}-\frac{\lambda}{x^2}\right)=0 \Leftrightarrow h(x)=\lambda-2x^2e^{2x},\quad \lambda>0$$

Η h παραγωγίσιμη ως διαφορά γινόμενο και σύνθεση παραγωγίσιμων για $x>0$ με $h'(x)=-4xe^{2x}-2x^2 2e^{2x}=-4xe^{2x}(1+x)<0$ για κάθε $x>0$
και αφού η h συνεχής στο $(0,+\infty)$ η h γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x)=\lim_{x\to 0^+}(\lambda-2x^2e^{2x})=\lambda$$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x)=\lim_{x\to +\infty}(\lambda-2x^2e^{2x})=-\infty$$

Αφού η h συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ το σύνολο τιμών της θα είναι το $(-\infty,\lambda)$, $\lambda>0$
Αλλά το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της h άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$. Το x_0 μοναδικό αφού η h γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

β) $h(1)=0 \Leftrightarrow \lambda-2e^2=0 \Leftrightarrow \lambda=2e^2$ συνεπώς $f(x)=\frac{2e^2}{x}-2+e^{2x}, \quad x>0$ και

$f'(x)=2e^{2x}-\frac{2e^2}{x^2}, \quad x>0$

Η f' παραγωγίσιμη για $x>0$ ως σύνθεση διαφορά και πηλίκο παραγωγίσιμων με $f''(x)=4e^{2x}+\frac{4e^2}{x^3}>0$ για κάθε $x>0$

άρα η f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Είναι $h(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)=0$ άρα:

Για $0<x<1$ έχουμε $f'(x)<f'(1) \Leftrightarrow f'(x)<0$ και f συνεχής στο $(0,1]$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

Για $x>1$ έχουμε $f'(x)>f'(1) \Leftrightarrow f'(x)>0$ και f συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Συνεπώς η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=3e^2-2>0$

Ακόμα: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{2x}-2+\frac{2e^2}{x}\right)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^2}{x}\right)=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^{2x}-2+\frac{2e^2}{x}\right)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2e^2}{x}\right)=0$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[3e^2-2,+\infty)$

Θα είναι $f(x)\geq 3e^2-2>0$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x>0$

γ) $f(x)=\frac{2e^2}{x}-2+e^{2x}, \quad x>0$

i) Η f είναι συνεχής ως πηλίκο άθροισμα διαφορά και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων στο $[1,2]\subseteq(0,+\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ ως γινόμενο, άθροισμα, διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=2e^{2x}-\frac{2e^2}{x^2}$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(1,2)$ τέτοιο ώστε, $f'(\rho)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ δηλαδή η εφαπτόμενη ευθεία στη c_f στο σημείο $M(\rho,f(\rho))$ είναι παράλληλη στην ευθεία ΚΛ αφού $f(1)=3e^2-2$ και $\lambda_{AB}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$

ii) Είναι $f'(\rho)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=e^2(e^2-2)$

Ακόμα $\dfrac{e}{2}-1<1<\rho<2<e+1$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα από το ερώτημα β) άρα:

$$f'\left(\frac{e}{2}-1\right)<f'(1)<f'(\rho)<f'(2)<f'(e+1)\Leftrightarrow f'\left(\frac{e}{2}-1\right)<f'(\rho)<f'(e+1)\Leftrightarrow$$

$$f'\left(\frac{e}{2}-1\right)<e^2(e^2-2)<f'(e+1)$$

Θέμα 3ο

α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και η $\varphi(t)=\dfrac{4}{f^2(t)+3}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση, άθροισμα και πηλίκο συνεχών.

Συνεπώς η $f(x)=\displaystyle\int_{-2}^{x}\frac{4}{f^2(t)+3}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=\dfrac{4}{f^2(x)+3}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Ισχύει $f(-2)=\displaystyle\int_{-2}^{-2}\frac{4}{f^2(x)+3}dt=0$ άρα για κάθε x με

$x<-2\Leftrightarrow f(x)<f(-2)\Leftrightarrow f(x)<0$

$x>-2\Leftrightarrow f(x)>f(-2)\Leftrightarrow f(x)>0$

β) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση, άθροισμα και πηλίκο παραγωγίσιμων με $f''(x)=-\dfrac{8f(x)f'(x)}{\left(f^2(x)+3\right)^2}$

Επομένως: $f''(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=-2$ αφού $-\dfrac{8f'(x)}{\left(f^2(x)+3\right)^2}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Ακόμα $f''(x)>0\Leftrightarrow -\dfrac{8f(x)f'(x)}{\left(f^2(x)+3\right)^2}>0\Leftrightarrow f(x)<0\Leftrightarrow x<-2$ (από (α))

Συνεπώς αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-2)$ η f κυρτή στο $(-\infty,-2]$
αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(-2,+\infty)$ η f κοίλη στο $[-2,+\infty)$
Η f αλλάζει κυρτότητα εκατέρωθεν του -2 και δέχεται εφαπτομένη στο $K(-2,f(-2))$ (αφού f παραγωγίσιμη στο -2) άρα η f παρουσιάζει σημείο καμπής το $K(-2,f(-2))$ ή $K(-2,0)$

γ) Αφού η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ είναι και «1-1», άρα αντιστρέφεται.
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{4}{f^2(x)+3}\Leftrightarrow f'(x)f^2(x)+3f'(x)=4\Leftrightarrow 3f'(x)f^2(x)+9f'(x)-12=0\Leftrightarrow$$

$\left(f^3(x)+9f(x)-12x\right)'=0$ και αφού η $f^3(x)+9f(x)-12x$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση άθροισμα, διαφορά και γινόμενο συνεχών θα ισχύει:
$f^3(x)+9f(x)-12x=c,\ c\in\mathbb{R}$ και αφού $f(-2)=0$ παίρνουμε:
$f^3(-2)+9f(-2)-12(-2)=c\Leftrightarrow c=24$
άρα $f^3(x)+9f(x)-12(x)-24=0$
Στην παραπάνω θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και έχουμε

$y^3+9y-12f^{-1}(y)-24=0$ ή $f^{-1}(y)=\frac{1}{12}y^3+\frac{3}{4}y-2$ επομένως

$f^{-1}(x)=\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{4}x-2,\ x\in\mathbb{R}$ αφού $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

δ) Από το ερώτημα (α) έχουμε $f(-2)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x>-2$ και αφού η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για το ζητούμενο εμβαδόν θα ισχύει:

$$E=\int_{-2}^{-\frac{7}{6}}|f(x)|dx=\int_{-2}^{-\frac{7}{6}}f(x)dx\ \ (1)$$

Είναι $f(-2)=0\Leftrightarrow f^{-1}(0)=-2$ και $f^{-1}(-1)=\frac{1}{12}+\frac{3}{4}-2=-\frac{7}{6}$

Στην σχέση (1) θέτουμε $x=f^{-1}(t)$

$$dx=\left(\frac{1}{12}t^3+\frac{3}{4}t-2\right)'dt \text{ άρα } dx=\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{4}\right)dt$$

$$x=-\frac{7}{6}\Leftrightarrow f^{-1}(t)=-\frac{7}{6}\Leftrightarrow t=f\left(-\frac{7}{6}\right)=1$$

$x=-2 \Leftrightarrow f^{-1}(t)=-2 \Leftrightarrow t=0$

Τότε από (1) έχουμε

$$E=\int_{-2}^{-\frac{7}{6}} f(x)dx=\int_{0}^{1} f(f^{-1}(t))\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{4}\right)dt=\int_{0}^{1} t\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{4}\right)dt=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{4}t^3+t\frac{3}{4}\right)dt=$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{t^4}{4}+\frac{3}{2}t^2\right]_0^1=\frac{7}{16}\text{τ.μ}$$

Από το Μαθηματικό Των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν: Γ. Ανδρουλιδάκης, Μ. Βυνιχάκης, Α. Δουλγεράκης, Μ. Μπαρμπούνη, Α. Τσιλιφώνης