Απαντήσεις

Θέμα 1ο

α) Έστω $z = x + yi$ τότε

$|z+3| = |z-3i| \Leftrightarrow |z+3|^2 = |z-3i|^2 \Leftrightarrow$

$(z+3)(\bar{z}+3) = (z-3i)(\bar{z}+3i) \Leftrightarrow$

$|z|^2 + 3z + 3\bar{z} + 9 = |z|^2 - 3i\bar{z} + 3iz + 9 \Leftrightarrow z + \bar{z} = i(z - \bar{z}) \Leftrightarrow$

$2\mathrm{Re}(z) = i2i\mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow y = -x$

Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι η ευθεία $\varepsilon: y = -x$

β) Αφού οι εικόνες των μιγαδικών u ανήκουν σε κύκλο κέντρου $k(3,0)$ και ακτίνας $\rho_1 = 2$ θα ισχύει $|u-3| = 2$ (1)

$$w = \frac{4iu - 16i}{u-3} \Leftrightarrow w = \frac{4i(u-4)}{u-3} \Leftrightarrow w = \frac{4i(u-3-1)}{u-3} \Leftrightarrow$$

$$w = \frac{4i(u-3)}{u-3} - \frac{4i}{u-3} \Leftrightarrow w - 4i = -\frac{4i}{u-3} \text{ τότε}$$

$$|w-4i| = \left|-\frac{4i}{u-3}\right| \Leftrightarrow |w-4i| = \frac{|-4i|}{|u-3|} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |w-4i| = 2$$

Συνεπώς οι εικόνες των μιγαδικών w ανήκουν σε κύκλο κέντρου $A(0,4)$ και ακτίνας $\rho_2 = 2$

γ) Στο παρακάτω ορθοκανικό σύστημα αξόνων φαίνονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w, u

$$|u-w|_{max} = HN = AK + \rho_1 + \rho_2 = \sqrt{4^2+3^2} + 2 + 2 = 9$$

$$|u-w|_{min} = LM = AK - \rho_1 - \rho_2 = \sqrt{4^2+3^2} - 2 - 2 = 1$$

Άρα $1 \le |u-w| \le 9$

δ) Είναι $|u-z|_{min} = \Xi Z = \Xi K - \rho_1 = \dfrac{|3+0|}{\sqrt{1^2+1^2}} - 2 = \dfrac{3\sqrt{2}-4}{2}$

φροντιστήρια πουκαμισάς

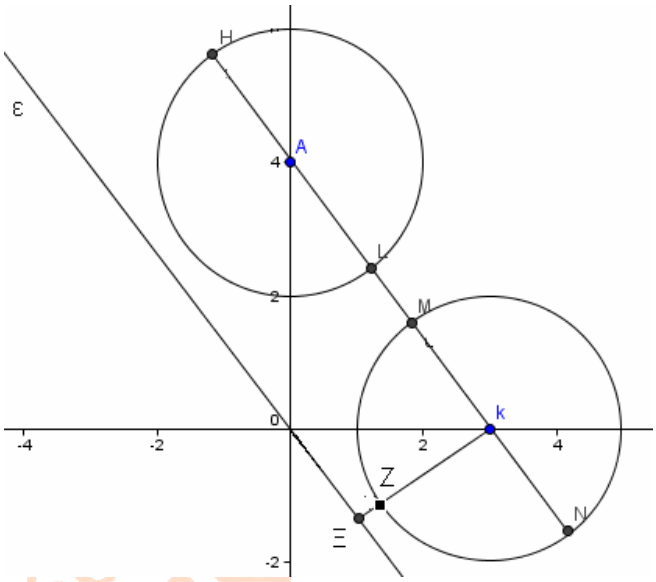
ε) Έστω ότι υπάρχουν μιγαδικοί $w_1, w_2, w_3, u_1, u_2, u_3$ με

$w_1 = x_1 + iy_1, \quad u_1 = \alpha_1 + i\beta_1$

$w_2 = x_2 + iy_2, \quad u_2 = \alpha_2 + i\beta_2$

$w_3 = x_3 + iy_3, \quad u_3 = \alpha_3 + i\beta_3$

τέτοιοι ώστε να ισχύει:



$w_1 + w_2 + w_3 + u_1 + u_2 + u_3 = 0 \Leftrightarrow$

$(x_1 + x_2 + x_3 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + i(y_1 + y_2 + y_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 0 \Leftrightarrow$

$x_1 + x_2 + x_3 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ και $y_1 + y_2 + y_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$

Άτοπο γιατί: οι εικόνες των μιγαδικών $w_1, w_2, w_3, u_1, u_2, u_3$ βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία ε και το σημείο (1,1) συνεπώς ισχύουν

$y_1 > -x_1, \; y_2 > -x_2, \; y_3 > -x_3, \; \beta_1 > -\alpha_1, \; \beta_2 > -\alpha_2, \; \beta_3 > -\alpha_3$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε

$y_1 + y_2 + y_1 + y_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + (x_1 + x_2 + x_3 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2) > 0$

Θέμα 2ο

α) Για $\lambda = 0$ η ευθεία $y = 0$ δηλαδή ο άξονας $x'x$ θα τέμνει την C_f σε δύο τουλάχιστον σημεία $M_1(x_1, f(x_1))$ και $M_2(x_2, f(x_2))$ με $x_1 < x_2$

Θα ισχύει $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2) = 0$ άρα η f δεν είναι 1-1

β) Έστω x_1, x_2 οι τετμημένες των M_1, M_2 του ερωτήματος α)

Η f συνεχής στο $[x_1, x_2]$ (αφού είναι παραγωγίσιμη)

Η f παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2)

$f(x_1) = f(x_2)$

φροντιστήρια πουκαμισάς

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ δηλαδή η f θα έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.

γ) i) Έστω $M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, f(x_2))$, $M_3(x_3, f(x_3))$ με $x_1 < x_2 < x_3$ τα σημεία τομής της C_f και της $\varepsilon : y = 2011x$

Η f συνεχής στα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ (αφού είναι παραγωγίσιμη)

Η f παραγωγίσιμη στα (x_1, x_2), (x_2, x_3)

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο

ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{2011x_2 - 2011x_1}{x_2 - x_1} = 2011$

και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοιο

ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \dfrac{2011x_3 - 2011x_2}{x_3 - x_2} = 2011$

Τότε $\xi_1 \neq \xi_2$ και $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ άρα η f' δεν είναι 1-1

ii) Η f' συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ (αφού είναι παραγωγίσιμη)

Η f' παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2)

$f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ (από ερώτημα γ.ι)

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\rho) = 0$

δ) Έστω η ευθεία $\varepsilon : y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και τέμνει C_f στα σημεία $M_1(x_1, f(x_1))$ και $M_2(x_2, f(x_2))$ με $x_1 < x_2$

Η f συνεχής στο $[x_1, x_2]$ (αφού είναι παραγωγίσιμη)

Η f παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2)

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\lambda x_2 - \lambda x_1}{x_2 - x_1} = \lambda \Leftrightarrow f'(\xi) = \lambda \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\lambda$ συνεπώς το σύνολο τιμών της f' είναι όλο το $\mathbb{R}$

Θέμα 3ο

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ άρα έχουμε:

$$f(-x)=\int_0^{-x}\frac{dt}{1+t^2}\overset{-t=u}{=}\int_0^{x}\frac{-du}{1+u^2}=-\int_0^{x}\frac{du}{1+u^2}=-\int_0^{x}\frac{dt}{1+t^2}=-f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Συνεπώς για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν ι) $-x \in \mathbb{R}$ ιι) $f(-x)=-f(x)$ άρα η f περιττή.

β) Έστω $g(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό ως πηλίκο συνεχών

τότε η $f(x)=\displaystyle\int_0^{x}\frac{dt}{1+t^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

Η $h(x)=f(\varepsilon\varphi x)-x$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων με

$$h'(x)=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-1=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-1=0$$

Η h συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ άρα απο τις συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής θα είναι $h(x)=c$

$h(0)=c \Leftrightarrow f(0)-0=c \Leftrightarrow c=0$ Άρα $h(x)=0 \Leftrightarrow f(\varepsilon\varphi x)=x$ (1)

γ) Έχουμε $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}>0$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\varepsilon\varphi x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\varepsilon\varphi x=+\infty$

Με τη βοήθεια της σχέσης (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(\varepsilon\varphi x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}x=-\frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(\varepsilon\varphi x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}x=\frac{\pi}{2}$$

Τότε $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(\varepsilon\varphi x) \overset{\varepsilon\varphi x=y}{=} \lim\limits_{y\to -\infty} f(y) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(\varepsilon\varphi x) \overset{\varepsilon\varphi x=y}{=} \lim\limits_{y\to +\infty} f(y) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

Αφού η f $\nearrow$ και συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι $f(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

δ) Αφού η f $\nearrow$ είναι και 1-1 άρα ορίζεται η αντίστροφη με πεδίο ορισμού το $f(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Από την σχέση (1) έχουμε:

$$f(\varepsilon\varphi x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(\varepsilon\varphi x)) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \varepsilon\varphi x \text{ με } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

ε) Είναι $w(0) = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 \left(\int_0^u \frac{dt}{1+t^2}\right)du = \int_0^1 u'\left(\int_0^u \frac{dt}{1+t^2}\right)du =$

$$\left[u\int_0^u \frac{dt}{1+t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u}{u^2+1}du = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \left[\frac{1}{2}\ln(u^2+1)\right]_0^1 = f(1) - \frac{\ln 2}{2} =$$

$$f\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \frac{\ln 2}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

στ) $3w(\xi) = \int_1^4 f(u)du \Leftrightarrow 3w(\xi) = \int_1^2 f(u)du + \int_2^3 f(u)du + \int_3^4 f(u)du \Leftrightarrow$

$$w(\xi) = \frac{w(1)+w(2)+w(3)}{3} = n$$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ άρα υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$w(x) = \int_x^\alpha f(u)du + \int_\alpha^{x+1} f(u)du = \int_\alpha^{x+1} f(u)du - \int_\alpha^x f(u)du$$

φροντιστήρια πουκαμισάς

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής άρα η $\int_{\alpha}^{x} f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη. Η συνάρτηση $\int_{\alpha}^{x+1} f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση της $\int_{\alpha}^{x} f(u)du$ και της $x+1$. Άρα η w παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$w'(x)=f(x+1)-f(x)>0$ αφού η f γνησίως αύξουσα.

Τότε $\left.\begin{matrix} w(1)<w(3) \\ w(2)<w(3) \end{matrix}\right\} w(1)+w(2)<2w(3) \Leftrightarrow$

$w(1)+w(2)+w(3)<3w(3) \Leftrightarrow n<w(3)$ ανάλογα $w(1)<n$

Η w συνεχής στο $[1,3]$ αφού είναι παραγωγίσιμη $w(1)\neq w(3)$ λόγω μονοτονίας $w(1)<n<w(3)$ άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $w(\xi)=n$ Το ξ μοναδικό λόγω μονοτονίας της w

z) Η συνάρτηση $g(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με $g'(t)=\dfrac{-2t}{\left(1+t^2\right)^2}$ συνεπώς η g γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ άρα για κάθε $x\geq 0$ και $x\leq t\leq x+1$ ισχύει

$g(x+1)\leq g(t)\leq g(x)$ τότε $\int_{x}^{x+1} g(x+1)dt\leq \int_{x}^{x+1} g(t)dt\leq \int_{x}^{x+1} g(x)dt \Leftrightarrow$

$g(x+1)\leq \int_{x}^{x+1} g(t)dt\leq g(x)$ αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+1} g(t)dt=0$ Αλλά αφού το πεδίο ορισμού της g είναι το $\mathbb{R}$ υπάρχει $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\int_{x}^{x+1} g(t)dt=\int_{x}^{\alpha} g(t)dt+\int_{\alpha}^{x+1} g(t)dt=f(x+1)-f(x)$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=0$

φροντιστήρια πουκαμισάς