ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 28

A_2 Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 16

A_3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 22

A_4. α) Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Σ, **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2-9x+18}{x^2+2x-3}$$

B_1. Θα πρέπει: $x^2+2x-3\neq 0$

Λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση: $x^2+2x-3=0$ και βρίσκουμε τις ρίζες της $x=-3$, $x=1$

Επομένως το πεδίο ορισμού της θα είναι: $A=\mathbb{R}-\{-3,1\}$

B_2. $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-9x+18}{x^2+2x-3}=\dfrac{(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+3)}{(x-1)\cdot(x+3)}=$

$$\frac{\cancel{(x+3)}\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{\cancel{(x+3)}\cdot(x-1)}=\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{x-1}$$

B_3. $\dfrac{x^3-2x^2-9x+18}{x^2+2x-3}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)\cdot(x-3)}{x-1}\geq 0$, ισοδύναμα $(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-1)\geq 0$

Βρίσκουμε τις ρίζες κάθε παράγοντα του γινομένου

$(x-2)\cdot(x-3)=0$. Άρα $x=2$, $x=3$ οι δύο ρίζες της εξίσωσης.

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

φροντιστήρια πουκαμισάς

Κάνουμε πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$(x-2)\cdot(x-3)$	+	+	−	+	
$x-1$	−	+	+	+	
$(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-1)$	−	+	−	+	

$x \in A = \mathbb{R} - \{-3,1\}$. Επομένως $x \in (1,2] \cup [3,+\infty)$

B₄. Στο ερώτημα B_2 δείξαμε ότι: $f(x) = \dfrac{(x-2)\cdot(x-3)}{x-1}$, οπότε

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{(x-2)\cdot(x-3)}{x-1} = \frac{(-3-2)\cdot(-3-3)}{-3-1} = \frac{30}{-4} = -\frac{15}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 1$. Η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία: $A(-1,-6)$ και $B\left(\frac{1}{2},0\right)$

Γ₁. Αφού η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α και Β , αυτά θα την επαληθεύουν δηλαδή θα ισχύει: $\begin{cases} f(-1) = -6 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε τα α , β

$$\begin{cases} f(-1) = -6 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = -7 \\ \alpha + 2\beta = -8 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} 3\beta = -15 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -5} \text{ και}$$

$$-\alpha + \beta = -7 \Leftrightarrow -\alpha - 5 = -7 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

Γ₂. Έχουμε $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$, παραγωγίζουμε τη συνάρτηση και έχουμε:

$$f'(x) = \left(2x^3 - 5x^2 + 1\right)' = \left(2x^3\right)' - \left(5x^2\right)' + (1)' = 6x^2 - 10x.$$

Λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση:

$$f'(x) = -4 \Leftrightarrow 6x^2 - 10x + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0$$

φροντιστήρια πουκαμισάς

Άρα $x=\frac{2}{3}$, $x=1$ οι δύο ρίζες.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-5x+2$		+	0	-	0	+	

Επομένως έχουμε: $x\in\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

Γ3. $$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{2x^2+x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^3-5x^2+1}{2x^2+x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}\left(2x^2-4x-2\right)}{\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}(2x+2)}=$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2-4x-2}{2x+2}=\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\frac{1}{2}-2}{2\frac{1}{2}+2}=\frac{\frac{1}{2}-2-2}{1+2}=\frac{-\frac{7}{2}}{3}=-\frac{7}{6}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-(\alpha+7)x+6}{x-3}, & x\neq 3\\ \beta-2, & x=3\end{cases}$$

α) Η f ορίζεται για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$

β) Αφού η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α, θα ισχύει:

$$f(2)=0\Leftrightarrow\frac{2^2-(\alpha+7)2+6}{2-3}=0\Leftrightarrow\frac{4-2\alpha-14+6}{-1}=0\Leftrightarrow-2\alpha=4\Leftrightarrow\boxed{\alpha=-2}$$

Η f είναι συνεχής, άρα θα είναι και συνεχής στο σημείο $x_0=3$, δηλ. θα ισχύει:

$$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2-(-2+7)x+6}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)\cdot(x-2)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x-2)=1$$

Είναι $f(3)=\beta-2$, επομένως: $\beta-2=1\Leftrightarrow\boxed{\beta=3}$

γ) Έχουμε για $x\neq3$, $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{x-3}=x-2$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{\sqrt{h+4}-2}=\lim_{h\to0}\frac{3+h-2-1}{\sqrt{h+4}-2}=\lim_{h\to0}\frac{h\cdot\left(\sqrt{h+4}+2\right)}{\left(\sqrt{h+4}-2\right)\cdot\left(\sqrt{h+4}+2\right)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\left(\sqrt{h+4}+2\right)}{\sqrt{h+4}^2-2^2}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\left(\sqrt{h+4}+2\right)}{h+4-4}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\left(\sqrt{h+4}+2\right)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\sqrt{h+4}+2\right)=2+2=4$$

Δ₂ α) Υπολογίζουμε την f'

$f'(x)=\left(2x^2+\alpha x+4-\alpha\right)'=4x+\alpha$. Άρα έχουμε ότι $f'(1)=4+\alpha$

και $f(1)=2+\cancel{\alpha}+4-\cancel{\alpha}=6$, επομένως από τη σχέση $f'(1)=f(1)$ έχουμε :

$4+\alpha=6\Leftrightarrow\boxed{\alpha=2}$

β) Υπολογίζουμε την f'', έχουμε $f'(x)=4x+2$, επομένως $f''(x)=(4x+2)'=4$

$(x-2)\cdot f''(x)=f'(x)-10\Leftrightarrow(x-2)\cdot 4=4x+2-10\Leftrightarrow 4x-8=4x-8$, που ισχύει

γ) $$\lim_{x\to -4}\frac{f'(x)+x^2-3x-14}{x+f''(x)}=\lim_{x\to -4}\frac{4x+2+x^2-3x-14}{x+4}=$$

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2+x-12}{x+4}=\lim_{x\to -4}\frac{\cancel{(x+4)}\cdot(x-3)}{\cancel{x+4}}=\lim_{x\to -4}(x-3)=-7$$

φροντιστήρια πουκαμισάς