ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1. Σχολικό βιβλίο σελ. 65

A_2. Σχολικό βιβλίο σελ. 66-87

A_3. **α**(Λ), **β**(Λ), **γ**(Σ), **δ**(Σ), **ε**(Σ)

ΘΕΜΑ Β

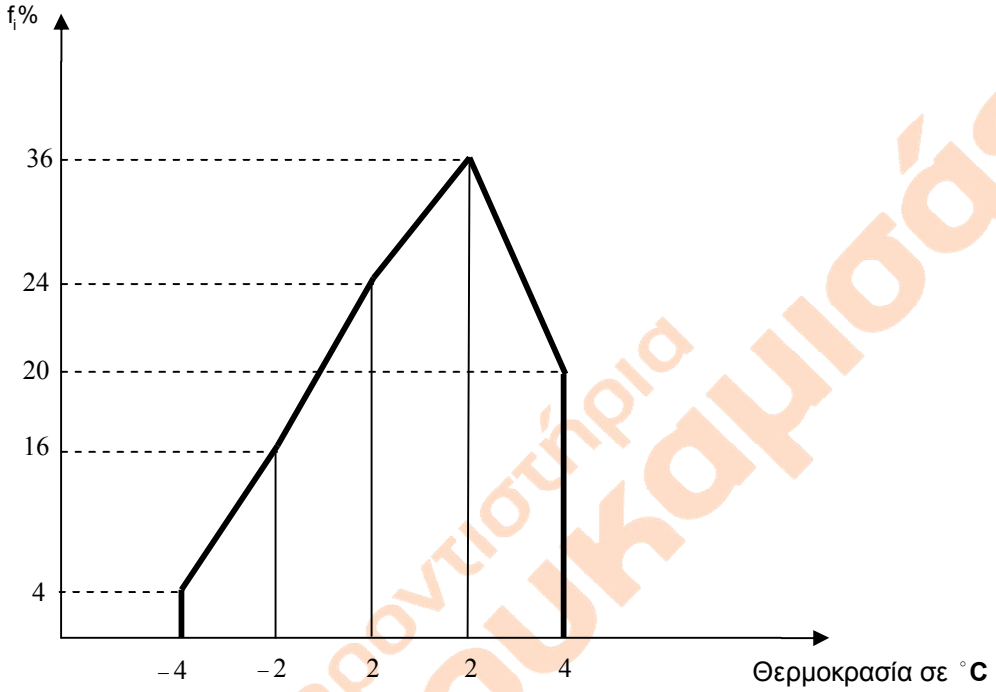
B_1. Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Θερμοκρασία x_i σε $^\circ C$	v_i	N_i	f_i	F_i	$x_i \cdot v_i$
-4	2	2	0,04	0,04	-8
-2	8	10	0,16	0,20	-16
0	12	22	0,24	0,44	0
2	18	40	0,36	0,80	36
4	10	50	0,20	1	40
Σύνολο	50		1		52

B_2. $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i}{v} = \dfrac{52}{50} = 1{,}04\ ^\circ C$ και $\delta = \dfrac{t_{25} + t_{26}}{2} = \dfrac{2+2}{2} = 2\ ^\circ C$

B$_3$. Το ποσοστό των πόλεων στις οποίες παρατηρήθηκε θερμοκρασία τουλάχιστον $-2^\circ C$ αλλά το πολύ $2^\circ C$ είναι $f_2\% + f_3\% + f_4\% = 16 + 24 + 36 = 76\%$

B$_4$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ$_1$. $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ *και* $\sqrt{3-x} > 0 \Leftrightarrow x < 3$, επομένως $D_f = (-\infty, 3)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 3)$ με

$$f'(x) = \left(\ln\left(\sqrt{3-x}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{3-x}}\left(\sqrt{3-x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{3-x}}\frac{1}{2\sqrt{3-x}}(3-x)'$$

$$= -\frac{1}{2|3-x|} = -\frac{1}{2(3-x)} = \frac{1}{2(x-3)} < 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 3)$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3)$

Γ$_2$. Οι αριθμοί α και β ανήκουν στο $D_f = (-\infty, 3)$ αφού ορίζονται οι τιμές της συνάρτησης $f(\alpha)$ και $f(\beta)$. Επομένως έχουμε $\alpha < 3$ και $\beta < 3$.

φροντιστήρια πουκαμισάς

Γνωρίζοντας όμως ότι $f(\alpha) < f(\beta)$ και f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3)$,

προκύπτει ότι $\beta < \alpha < 3$.

Διατάσσουμε τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά : $\beta,\ \alpha,\ 3\ ,10$ και επειδή οι αριθμοί είναι τέσσερις , η διάμεσος θα είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων αριθμών.

Δηλαδή $\delta = \dfrac{\alpha+3}{2} \Leftrightarrow -1 = \dfrac{\alpha+3}{2} \Leftrightarrow \alpha = -5$

Γνωρίζουμε επιπλέον ότι $\bar{x} = -1$, επομένως $\dfrac{\beta+\alpha+3+10}{4} = -1 \overset{\alpha=-5}{\Leftrightarrow} \dfrac{\beta+8}{4} = -1 \Leftrightarrow \beta = -12$

Γ3. α. $\alpha_2 = 25 \Leftrightarrow \alpha_0 + 2c = 25$ και $\dfrac{\alpha_3+\alpha_4}{2} = 40 \Leftrightarrow \alpha_3 + \alpha_4 = 80 \Leftrightarrow 2\alpha_0 + 7c = 80$

από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι $c = 10$ και $\alpha_0 = 5$

β. $v_2 = -100f'(-2) = -100\dfrac{1}{2(-2-3)} = -100\dfrac{1}{-10} = 10$, $v_4 = -\dfrac{5}{f'(1)} = -\dfrac{5}{\dfrac{1}{2(1-3)}} = -\dfrac{5}{-\dfrac{1}{4}} = 20$

και $f_5 = \dfrac{1}{-200f'(-7)} = \dfrac{1}{-200\dfrac{1}{2(-7-3)}} = \dfrac{1}{-200\dfrac{1}{-20}} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

$x_1 \cdot v_1 = 40 \Leftrightarrow 10v_1 = 40 \Leftrightarrow v_1 = 4$

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

[-)	x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$x_i \cdot v_i$
5 -15	10	4	4	0,08	0,08	40
15 -25	20	10	14	0,20	0,28	200
25 -35	30	11	25	0,22	0,50	330
35 -45	40	20	45	0,40	0,9	800
45 -55	50	5	50	0,1	1	250
Σύνολο		50		1		1620

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i}{v} = \frac{1620}{50} = 32,4 \text{ λεπτά}$$

γ. Το ποσοστό των εργαζομένων που χρειάζονται τουλάχιστον 12,5 λεπτά αλλά το πολύ 30 λεπτά ώστε να φτάσουν στον τόπο εργασίας τους είναι :

$$\frac{f_1}{4}\% + f_2\% + \frac{f_3}{2}\% = 2 + 20 + 11 = 33\%$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. Η διάμεση θερμοκρασία είναι 25^0C άρα σύμφωνα με το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων το 50% των παρατηρήσεων είναι μεταξύ του $F_2\%$ και του 70%, υπολογίζοντας τις αναλογίες έχουμε ότι:

$$\frac{70\% - F_2\%}{50\% - F_2\%} = \frac{26-24}{26-25} \Leftrightarrow 70\% - F_2\% = 2(50\% - F_2\%) \Leftrightarrow$$

$$70\% - F_2\% = 100 - 2F_2\% \Leftrightarrow F_2\% = 30\%$$

άρα $F_2 = 0.3$ οπότε $f_3\% = F_3\% - F_2\% = 70\% - 30\% = 40\%$

Από 25^0C μέχρι 28^0C βρίσκεται το

$$\frac{1}{2}f_3\% + f_4\% = 40\% \Leftrightarrow \frac{1}{2}40\% + f_4\% = 40\% \Leftrightarrow f_4\% = 20\%$$

και $F_4\% = F_3\% + f_4\% = 70\% + 20\% = 90\%$, άρα $F_4 = 0,9$

Δ₂. Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

[-)	x_i	v_i	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
20 -22	21	3	0,1	0,1	2.1	16	48
22 -24	23	6	0,2	0,3	4.6	4	24
24 -26	25	12	0,4	0,7	10	0	0
26 -28	27	6	0,2	0,9	5.4	4	24
28-30	29	3	0,1	1	2.9	16	48
Σύνολο		30	1		25		144

φροντιστήρια πουκαμισάς

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 25\ ^\circ C$$

Δ3. Η διακύμανση των μισθών είναι $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \dfrac{144}{30} = 4,8$, οπότε

Δ4. **α.** Η μέση θερμοκρασία της πόλης είναι $\bar{x} = 25\ ^\circ C$ και η διάμεση θερμοκρασία είναι δ=25$^\circ C$,

άρα το διάστημα $\left(\bar{x} - 2,\delta + \dfrac{1}{2}\right)$ γίνεται $(23\ ,\ 25,5)$ και το πλήθος των ημερών είναι

$\dfrac{1}{2}v_2 + \dfrac{3}{4}v_3 = \dfrac{1}{2}6 + \dfrac{3}{4}12 = 12$ ημέρες.

β. Έχουμε ότι $\bar{x} = 25 \Leftrightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i}{v} = 25 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i v_i = 750$

Έστω ότι κ ημέρες θα έπρεπε να είχαμε θερμοκρασία από 28 έως 30 αντί για 20 έως 22 , ώστε η νέα μέση θερμοκρασία να είναι πλέον $25,8^0 C$, δηλαδή

$$\bar{y} = 25,8 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i + 29\kappa - 21\kappa}{30} = 25,8 \Leftrightarrow 750 + 8\kappa = 774 \Leftrightarrow$$

$\kappa = 3$ ημέρες.

φροντιστήρια πουκαμισάς