ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1. Σχολικό βιβλίο σελ. 65

A_2. Σχολικό βιβλίο σελ. 58-59

A_3. **α**(Σ), **β**(Λ), **γ**(Λ), **δ**(Λ), **ε**(Σ)

ΘΕΜΑ Β

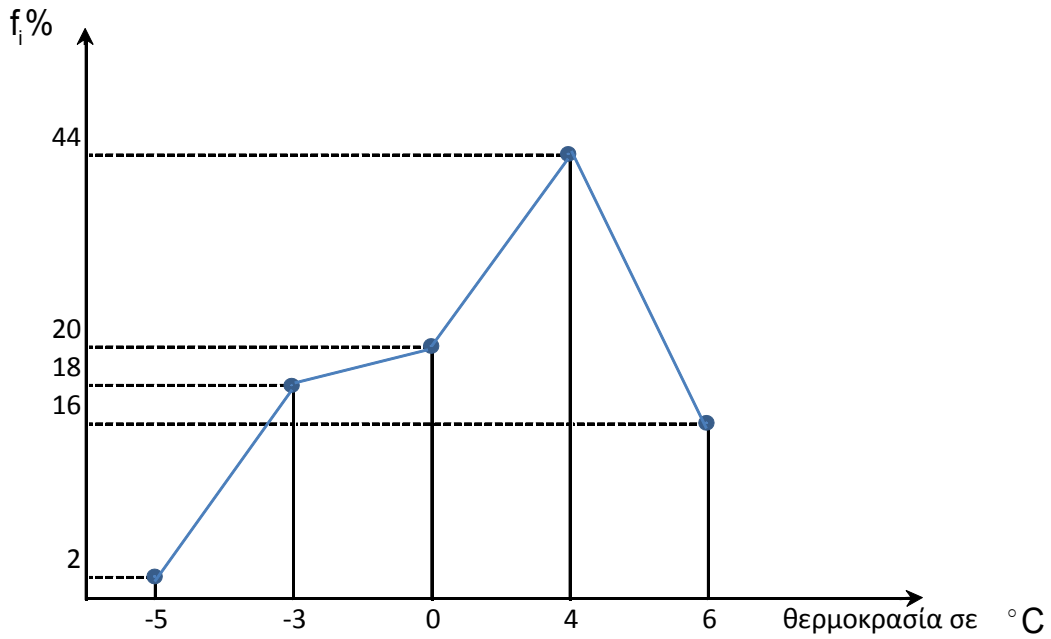
B_1. Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Θερμοκρασία x_i σε $^\circ C$	v_i	N_i	f_i	F_i	$x_i \cdot v_i$
-5	1	1	0,02	0,02	-5
-3	9	10	0,18	0,2	-27
0	10	20	0,2	0,4	0
4	22	42	0,44	0,84	88
6	8	50	0,16	1	48
Σύνολο	50		1		104

B_2. $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i}{v} = \dfrac{104}{50} = 2{,}08\ ^\circ C$ και $\delta = \dfrac{t_{25} + t_{26}}{2} = \dfrac{4+4}{2} = 4\ ^\circ C$

B₃. Το ποσοστό των πόλεων στις οποίες παρατηρήθηκε θερμοκρασία τουλάχιστον $-3^\circ C$ αλλά το πολύ $4^\circ C$ είναι $f_2\% + f_3\% + f_4\% = 18 + 20 + 44 = 82\%$

B₄.



ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$,επομένως $D_f = (-\infty, 1]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ με

$$f'(x) = \left(e^{\sqrt{1-x}}\right)' = e^{\sqrt{1-x}}\left(\sqrt{1-x}\right)' = \frac{e^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}(1-x)'$$

$$= -\frac{e^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}} < 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 1)$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$

Γ₂. Οι αριθμοί α και β ανήκουν στο $D_f = (-\infty, 1]$ αφού ορίζονται οι τιμές της συνάρτησης $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.Επομένως θα έχουμε $\alpha \leq 1$ και $\beta \leq 1$.

Γνωρίζοντας όμως ότι $f(\alpha) < f(\beta)$ και f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$, προκύπτει ότι $\beta < \alpha \leq 1$.

Διατάσσουμε τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά : β, α, 1 ,8 και επειδή οι αριθμοί είναι τέσσερις , η διάμεσος θα είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων αριθμών.

Δηλαδή $\delta = \frac{\alpha+1}{2} \Leftrightarrow -3 = \frac{\alpha+1}{2} \Leftrightarrow \alpha = -7$

Γνωρίζουμε επιπλέον ότι $\bar{x} = -2$, επομένως $\frac{\beta+\alpha+1+8}{4} = -2 \overset{\alpha=-7}{\Leftrightarrow} \frac{\beta+2}{4} = -2 \Leftrightarrow \beta = -10$

Γ₃. α. $15 + c + \frac{c}{2} = 30 \Leftrightarrow \frac{3c}{2} = 15 \Leftrightarrow c = 10$

β. $v_1 = -4e^{-1}f'(0) = -4e^{-1}\left(-\frac{e}{2}\right) = 2$, $v_3 = -\frac{40}{e^2}f'(-3) = -\frac{40}{e^2}\left(-\frac{e^2}{4}\right) = 10$

και $f_5 = -\frac{f(1)}{\alpha-3} = -\frac{1}{-7-3} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$x_2 \cdot v_2 = 360 \Leftrightarrow 20v_2 = 360 \Leftrightarrow v_2 = 18$

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

[-)	x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$x_i \cdot v_i$
5 -15	10	2	2	0,05	0,05	20
15 -25	20	18	20	0,45	0,5	360
25 -35	30	10	30	0,25	0,75	300
35 -45	40	6	36	0,15	0,9	240
45 -55	50	4	40	0,1	1	200
Σύνολο		40		1		1120

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i}{v} = \frac{1120}{40} = 28 \text{ λεπτά}$$

γ. Το ποσοστό των εργαζομένων που χρειάζονται τουλάχιστον 10 λεπτά αλλά το πολύ 30 λεπτά ώστε να φτάσουν στον τόπο εργασίας τους είναι :

$$\frac{f_1}{2}\% + f_2\% + \frac{f_3}{2}\% = 2{,}5 + 45 + 12{,}5 = 60\%$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. Ο διάμεσος μισθός είναι 1050 ευρώ, δηλαδή το 50% των υπαλλήλων έχουν μισθό μικρότερο ή ίσο των 10,5 εκατοντάδων ευρώ

Άρα $F_3 + \frac{1}{4}f_4 = 0,5 \Leftrightarrow 0,4 + \frac{1}{4}f_4 = 0,5 \Leftrightarrow f_4 = 0,4$

και $F_4 = F_3 + f_4 = 0,4 + 0,4 = 0,8$

Το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν μισθό από 650 έως 900 ευρώ είναι 17,5%, επομένως

$\frac{3}{4}f_2 + \frac{1}{2}f_3 = 0,175 \Leftrightarrow 3f_2 + 2f_3 = 0,7 \quad (1)$

$f_1 = F_1 = 0,1$ και

Όμως $\sum_{i=1}^{5} f_i = 1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow f_2 + f_3 = 0,3 \quad (2)$

Λύνοντας το (Σ) των (1) και (2) προκύπτει ότι $f_2 = 0,1$ και $f_3 = 0,2$

$F_2 = F_1 + f_2 = 0,1 + 0,1 = 0,2$

Δ₂. Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

[-)	x_i	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
4 -6	5	0,1	0,1	0,5	2,5
6 -8	7	0,1	0,2	0,7	0,9
8 -10	9	0,2	0,4	1,8	0,2
10 -12	11	0,4	0,8	4,4	0,4
12-14	13	0,2	1	2,6	1,8
Σύνολο		1		10	5,8

$\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 10$ εκατοντάδες ευρώ ή 1000 ευρώ

Δ₃. Η διακύμανση των μισθών είναι $s^2 = \sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 f_i = 5,8$, οπότε

$CV^2 = \left(\frac{s}{\bar{x}}\right)^2 = \frac{s^2}{\bar{x}^2} = \frac{5,8}{100} > \frac{1}{100}$, δηλαδή $CV > 0,1$ και το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

φροντιστήρια πουκαμισάς

Δ₄. Το ποσοστό των υπαλλήλων που παίρνουν μισθό από 500 έως 900 ευρώ είναι

$\frac{1}{2}f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3 = 0,25$, δηλ. 25% . Επομένως $\frac{25}{100}v = 60 \Leftrightarrow v = 240$

α. το πλήθος των υπαλλήλων που παίρνουν μισθό στο διάστημα

$\left(\bar{x} + \frac{1}{2},\ \delta + \frac{5}{2}\right)$ δηλαδή από $\bar{x} + \frac{1}{2} = 10 + 0,5 = 10,5$ εκατοντάδες ευρώ έως

$\delta + \frac{5}{2} = 10,5 + 2,5 = 13$ εκατοντάδες ευρώ είναι

$\frac{3}{4}v_4 + \frac{1}{2}v_5 = \frac{3}{4}v \cdot f_4 + \frac{1}{2}v \cdot f_5 = \frac{1}{2}v\left(\frac{3}{2}f_4 + f_5\right) = \frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 0,8 = 96$ υπάλληλοι

β. $\bar{x} = 10 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i}{v} = 10 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i v_i = 2400$

Έστω ότι θα απολυθούν κ υπάλληλοι με αντιπροσωπευτικό μισθό τις 13 εκατοντάδες ευρώ, ώστε ο νέος μέσος μισθός να είναι πλέον 925 ευρώ, δηλαδή

$\bar{y} = 9,25 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i - 13 \cdot \kappa}{240 - \kappa} = 9,25 \Leftrightarrow 2400 - 13\kappa = 2220 - 9,25\kappa \Leftrightarrow$

$3,75\kappa = 180 \Leftrightarrow \kappa = 48$ υπάλληλοι, που αντιστοιχεί σε ποσοστό 20%

Επομένως, θα απολυθούν όλοι οι υπάλληλοι των οποίων ο μισθός βρίσκεται στην τελευταία κλάση