Απαντήσεις

Θέμα 1ο

Α. α) $v_1=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2)=\sqrt{3+1}+2=4$

Άρα $v_1=4$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη για $x>0$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με $f'(x)=4x-20\frac{1}{2\sqrt{x}}-16\frac{1}{x}=4x-\frac{10}{\sqrt{x}}-\frac{16}{x}$ και επειδή η κλίση της εφαπτομένης της c_f στο $A(4,f(4))$ είναι ίση με $f'(4)$ έχουμε: $v_2=f'(4)=4\cdot 4-\frac{10}{\sqrt{4}}-\frac{16}{4}=7$ άρα $v_2=7$

γ) Για να είναι η συνάρτηση g συνεχής στο $x_0=3$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=f(3)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 3}(x^2+5)=v_3+3\Leftrightarrow 3^2+5=v_3+3\Leftrightarrow v_3=11$

δ) $v_4=\frac{v_1+3v_2+v_3}{2}\Leftrightarrow v_4=\frac{4+3\cdot 7+11}{2}\Leftrightarrow v_4=18$

Β. α) Για τα κέντρα των κλάσεων x_i με $i=1,2,3,4$ έχουμε διαδοχικά: $x_1=\frac{4+10}{2}=7$, $x_2=\frac{10+16}{2}=13$, $x_3=\frac{16+22}{2}=19$, $x_4=\frac{22+28}{2}=25$

Από τον ορισμό της σχετικής συχνότητας $f_i\%=\frac{v_i}{v}100$ για $i=1,2,3,4$ έχουμε: $f_1\%=10$, $f_2\%=17{,}5$, $f_3\%=27{,}5$, $f_4\%=45$

Από τον ορισμό της αθροιστικής συχνότητας $N_i=v_1+v_2+...+v_i$ για $i=1,2,3,4$ έχουμε διαδοχικά: $N_1=v_1=4$, $N_2=v_1+v_2=11$, $N_3=v_1+v_2+v_3=22$, $N_4=v_1+v_2+v_3+v_4=40$

Από τον ορισμό της αθροιστικής σχετικής συχνότητας $F_i\% = (f_1 + f_2 + ... + f_i)100$ $F_1\% = f_1 100 = 10$, $F_2\% = (f_1 + f_2)100 = 27,5$, $F_3\% = (f_1 + f_2 + f_3)100 = 55$, $F_4\% = (f_1 + f_2 + f_3 + f_4)100 = 100$

Τα γινόμενα $x_i v_i$ για $i = 1,2,3,4$ προκύπτουν εύκολα από τις ήδη γνωστές στήλες των x_i, v_i. Συνεπώς έχουμε:

Κλάσεις [-)	Συχνότητα v_i	Κέντρο x_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Συχνότητα $F_i\%$	Γινόμενα $x_i v_i$
4-10	4	7	10	4	10	28
10-16	7	13	17,5	11	27,5	91
16-22	11	19	27,5	22	55	209
22-28	18	25	45	40	100	450
Άθροισμα	40		100			778

β) $$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{\sum_{i=1}^{4} v_i} = \frac{778}{40} = 19,45$$

γ) Επειδή οι κλάσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες το σύνολο των μαθητών που έχουν από 16 ως 25 απουσίες για το μήνα Μάρτιο είναι $v_3 + \frac{v_4}{2} = 11 + 9 = 20$ δηλαδή όλοι οι μαθητές της τρίτης κλάσης και οι μισοί της τέταρτης. Από την τέταρτη κλάση παίρνουμε τους μισούς μαθητές, αφού το 25 είναι το μέσο της κλάσης, οι κλάσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες και θέλουμε να έχουν μέχρι 25 απουσίες.

Το ποσοστό των μαθητών που έχουν τουλάχιστον 10 απουσίες το μήνα Μάρτιο είναι $100\% - F_1\% = (100 - 10)\% = 90\%$

Θέμα 2ο

α) $g(0)=\alpha 0^3+\beta 0^2+\gamma 0+\delta=\delta$ αλλά $g(0)=\frac{1}{10}\Leftrightarrow \delta=\frac{1}{10}$ Η g παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ αλλά $g'(0)=\frac{7}{10}\Leftrightarrow 3\alpha 0^2+2\beta 0+\gamma=\frac{7}{10}\Leftrightarrow \gamma=\frac{7}{10}$

Αφού $A=\{\omega_1,\omega_2\}$ $P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_2)=\alpha+\beta$ όμως

$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma+\delta=1\Leftrightarrow$

$\alpha+\beta=1-\gamma-\delta\Leftrightarrow \alpha+\beta=1-\frac{7}{10}-\frac{1}{10}\Leftrightarrow \alpha+\beta=\frac{2}{10}\Leftrightarrow P(A)=\frac{2}{10}$

β) Έστω $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$ η ζητούμενη εφαπτομένη. Θα ισχύει: $P(\omega_1)=P(\omega_2)=P(\omega_3)=P(\omega_4)=\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{1}{4}$ άρα η συνάρτηση g γίνεται: $g(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$ και $g'(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης εφαπτομένης θα είναι $g'(0)=\frac{1}{4}=\lambda$

Το σημείο $(0,g(0))$ επαληθεύει την ε άρα $g(0)=\frac{1}{4}0+\beta\Leftrightarrow \beta=\frac{1}{4}$

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$

γ) Η $g'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $g''(x)=6\alpha x+2\beta$ $g''(0)=\frac{3}{10}\Leftrightarrow 6\alpha 0+2\beta=\frac{3}{10}\Leftrightarrow \beta=\frac{3}{20}$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$P(B')=1-P(B)=1-P(\omega_2)=1-\beta=1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}$

δ) Αφού ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα σημαίνει ότι δεν μπορούν τα α, β, γ, δ να είναι όλα ίσα μεταξύ τους.

Τότε οι παραστάσεις $(x-\alpha)^2,(x-\beta)^2,(x-\gamma)^2,(x-\delta)^2$ δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα 0 Άρα $(x-\alpha)^2+(x-\beta)^2+(x-\gamma)^2+(x-\delta)^2>0$ Τότε η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{2((x-\alpha)+(x-\beta)+(x-\gamma)+(x-\delta))}{2\sqrt{(x-\alpha)^2+(x-\beta)^2+(x-\gamma)^2+(x-\delta)^2}}=\ldots$$

$$=\frac{4x-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(x-\beta)^2+(x-\gamma)^2+(x-\delta)^2}}=$$

$$\frac{4x-1}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(x-\beta)^2+(x-\gamma)^2+(x-\delta)^2}}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow x>0{,}25$$

x	$-\infty$	0,25	$+\infty$
f′	−		+
f	↘		↗

Η f παρουσιάζει για $x=0{,}25$ ελάχιστο το

$$f(0{,}25)=\sqrt{(0{,}25-\alpha)^2+(0{,}25-\beta)^2+(0{,}25-\gamma)^2+(0{,}25-\delta)^2}$$

ε) Είναι $\bar{x}=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}=0{,}25$ και

$$S^2=\frac{(\alpha-0{,}25)^2+(\beta-0{,}25)^2+(\gamma-0{,}25)^2+(\delta-0{,}25)}{4}$$

$$S=\frac{\sqrt{(\alpha-0{,}25)^2+(\beta-0{,}25)^2+(\gamma-0{,}25)^2+(\delta-0{,}25)}}{2}\Leftrightarrow S=\frac{f(0{,}25)}{2}$$

Άρα $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{\frac{f(0{,}25)}{2}}{0{,}25}\Leftrightarrow CV=2f(0{,}25)$

Θέμα 3ο

α) Πρέπει $1-\frac{x^2}{4}\geq 0 \Leftrightarrow 4-x^2\geq 0 \Leftrightarrow -2\leq x\leq 2$ άρα $A_f=[-2,2]$

Για τα σημεία τομής με τον $y'y$ έχουμε: $0\in A_f$ άρα για $x=0$ $f(0)=1$ συνεπώς στο $T(0,1)$ η C_f τέμνει τον $y'y$

β) Ισχύει $x_1<x_2<...<x_9$ άρα $\delta=x_5=0$ αλλά $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5=0$ $\Leftrightarrow x_1<x_2<x_3<x_4<0$ άρα $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4>0$

γ) Η f παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=\frac{-\frac{2}{4}x}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}=-\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \qquad f'(x)>0\Leftrightarrow ...x<0$$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
f′			+		−		
f			↗		↘		

Η f παρουσιάζει για x=0 μέγιστο το $f(0)=1$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο [-2,0] άρα για κάθε x με $-2<x\leq 0\Leftrightarrow f(-2)<f(x)\leq f(0)\Leftrightarrow 0<f(x)\leq 1$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,2] άρα για κάθε x με $0\leq x<2\Leftrightarrow f(0)\geq f(x)>f(2)\Leftrightarrow 0<f(x)\leq 1$

Τότε για κάθε x_i με $i=1...9$ ισχύει $0<f(x_i)\leq 1$ (1) με την ισότητα να ισχύει το πολύ για ένα x_i αφού $f(x)=1\Leftrightarrow x=0$

Άρα στην σχέση (1) για $i=1...9$ με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων που προκύπτουν παίρνουμε

$$\frac{0}{4}<\frac{f(x_1)+...+f(x_4)}{4}<\frac{4}{4}\Leftrightarrow 0<\overline{x}<1$$

φροντιστήρια πουκαμισάς

δ) $(OA_i)=\sqrt{(x_i-0)^2+(y_i-o)^2}=\sqrt{x_i^2+1-\frac{x_1^2}{4}}=\sqrt{\frac{3x_i^2}{4}+1}$ για $i=1,2,...9$

Συνεπώς

$$\frac{(OA_1)^2+(OA_2)^2+...+(OA_9)^2}{9}=\frac{\frac{3}{4}\left(x_1^2+x_2^2+...+x_9^2\right)+9}{9}\overset{\bar{x}=0}{=}$$

$$\frac{3}{4}\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+...+(x_9-\bar{x})^2}{9}+1=\frac{3}{4}s^2+1=\frac{3}{4}1,8+1=2,35$$

ε) Αφού η μέση τιμή των x_i με $i=1,2,...9$ είναι $\bar{x}=0$ σημαίνει ότι υπάρχουν και θετικά και αρνητικά x_i.Αφού $-2<x_1<x_2<...<x_9<2$ θα είναι $-2<x_1<0 \Leftrightarrow 0<-x_1<2$ (1) και $0<x_9<2$ (2) Με πρόσθεση των (1), (2) έχουμε $0<x_9-x_1<4 \Leftrightarrow 0<R_x<4$

Από το Μαθηματικό Τμήμα
των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου
συνεργάστηκαν : Γ. Ανδρουλιδάκης, Μ. Μπαρμπούνη