Απαντήσεις

Θέμα 1ο

Α. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με:
$f'(x)=3x^2+2kx+\lambda$
Εφόσον η εφαπτομένη της f στο $A(4,f(4))$ είναι η $y=9x-24$ θα ισχύει:
$f'(4)=9 \Leftrightarrow 3\cdot 4^2+2k4+\lambda=9 \Leftrightarrow 8k+\lambda=-39$ (1) και
$f(4)=9\cdot 4-24 \Leftrightarrow 4^3+k4^2+\lambda 4+8=36-24 \Leftrightarrow 16k+4\lambda=-60$ (2)
Από την λύση του συστήματος των (1), (2) προκύπτει $k=-6$ και $\lambda=9$

Β. α) Για $k=-6$ και $\lambda=9$ έχουμε:
$f(x)=x^3-6x^2+9x+8$ και $f'(x)=3x^2-12x+9$
$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=3$
Ο πίνακας προσήμου της f′ και μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
f′(x)	+	0	−	0	+
f(x)	↗		↘		↗

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=1$ το $M=f(1)=1^3-61^2+9\cdot 1+8=12$
Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=3$ το
$\mu=f(3)=3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3+8=8$
Άρα $M=12$ και $\mu=8$

φροντιστήρια πουκαμισάς

β) Μας δίνεται το πολύγωνο συχνοτήτων, το οποίο γνωρίζουμε ότι για να το κατασκευάσουμε βρίσκουμε το μέσο της κάθε κλάσης. Αν οι κλάσεις είναι της μορφής $[\alpha,\alpha+c)$, $[\alpha+c,\alpha+2c)$, $[\alpha+2c,\alpha+3c)$, $[\alpha+3c,\alpha+4c)$ Τότε:

$$\frac{\alpha+c+\alpha+2c}{2}=10 \Leftrightarrow \frac{2\alpha+3c}{2}=10 \Leftrightarrow 2\alpha+3c=20 \ (3) \text{ και}$$

$$\frac{\alpha+3c+\alpha+4c}{2}=18 \Leftrightarrow \frac{2\alpha+7c}{2}=18 \Leftrightarrow 2\alpha+7c=36 \ (4)$$

Από την λύση του συστήματος των (3), (4) προκύπτει $\alpha=4$ και $c=4$

Άρα οι κλάσεις είναι οι $[4,8)$, $[8,12)$, $[12,16)$, $[16,20)$

γ) i)

$$f_2=\lim_{x\to3}\frac{f'(x)}{20(2f''(x)-10x+18)}=\lim_{x\to3}\frac{3x^2-12x+9}{20(12x-24-10x+18)}=\lim_{x\to3}\frac{3(x^2-4x+3)}{20(2x-6)}=$$

$$\lim_{x\to3}\frac{3(x-1)(x-3)}{40(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{3(x-1)}{40}=\frac{6}{40}=0,15$$

ii) $f_1+f_2+f_3+f_4=1 \Leftrightarrow \frac{8}{v}+0,15+\frac{14}{v}+\frac{12}{v}=1 \Leftrightarrow \frac{34}{v}=0,85 \Leftrightarrow v=40$

Τότε $f_2=\frac{v_2}{v} \Leftrightarrow v_2=f_2v \Leftrightarrow v_2=0,15\cdot40 \Leftrightarrow v_2=6$

iii) $f_1=\frac{v_1}{v}=\frac{8}{40}=0,2$, $f_2=0,15$, $f_3=\frac{v_3}{v}=\frac{14}{40}=0,35$,

$f_4=\frac{v_4}{v}=\frac{12}{40}=0,3$

Άρα

Κλάσεις	v_i	f_i	$f_i\%$
[4-8)	8	0,2	20
[8-12)	6	0,15	15
[12-16)	14	0,35	35
[16-20)	12	0,3	30
Σύνολο	40	1	100

φροντιστήρια πουκαμισάς

Οι κλάσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες, συνεπώς για το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $[7,8)$ έστω μ_1 θα ισχύει: $\frac{8-7}{8-4}=\frac{\mu_1}{v_1}\Leftrightarrow \mu_1=\frac{1}{4}v_1=2$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $[16,17]$ είναι $\frac{1}{4}12=3$

Άρα συνολικά το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $[7,17]$ είναι: $\frac{1}{4}v_1+v_2+v_3+\frac{1}{4}v_4=\frac{1}{4}8+6+14+\frac{1}{4}12=25$ παρατηρήσεις και το αντίστοιχο ποσοστό είναι:

$$\frac{1}{4}f_1\%+f_2\%+f_3\%+\frac{1}{4}f_4\%=\frac{1}{4}20\%+15\%+35\%+\frac{1}{4}30\%=62,5\%$$

Θέμα 2ο

α) ι) Για την μέση τιμή $\bar{x}$ των κ, 4, 7 λ, 5, 8, ισχύει

$$\bar{x}=\frac{\kappa+4+7+\lambda+5+8}{6}\Leftrightarrow \kappa+\lambda+24=24\Leftrightarrow \kappa+\lambda=0 \quad (1)$$

Εφόσον η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$ (2)

Για $x\neq 1$ έχουμε: $f(x)=\frac{-x^2-2x+3}{\sqrt{2-x}-1}=\frac{-(x+3)(x-1)(\sqrt{2-x}+1)}{(\sqrt{2-x}-1)(\sqrt{2-x}+1)}=$

$$\frac{-(x+3)(x-1)(\sqrt{2-x}+1)}{1-x}=(x+3)(\sqrt{2-x}+1)$$

άρα $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+3)(\sqrt{2-x}+1)=8$ Επομένως από την (2)

$\lambda+9=8\Leftrightarrow \lambda=-1$ και τότε από (1) $\kappa=1$

ιι) Οι τιμές της μεταβλητής Χ διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά είναι: -1, 1, 4, 5, 7, 8 συνεπώς η διάμεσός τους δ ισούται με $\delta=\frac{4+5}{2}=4,5$

φροντιστήρια πουκαμισάς

iii) Είναι

$$s^2=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2=\frac{(-1-4)^2+(1-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(7-4)^2+(8-4)^2}{6}=$$

$$\frac{25+9+1+9+16}{6}=10$$

επομένως η τυπική απόκλιση s έχει τιμή $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{10}$

Αν $X_i^{'}$, $i=1,2,...,6$ είναι οι νέες τιμές της μεταβλητής X τότε

$$X_i^{'}=X_i-\frac{30}{100}X_i=\frac{70}{100}X_i=0,7X_i,\ i=1,2,...,6$$

Τότε σύμφωνα με εφαρμογή του σχολικού βιβλίου θα έχουμε:

$$s'=0,7s=0,7\sqrt{10}$$

β) Ο δειγματικός χώρος είναι Ω={-3,-2,-1,0,1,2,3} και $\alpha\in\Omega$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$g'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{\alpha}{2}x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\alpha\right)x+2012\right)'=x^2+\alpha x+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\alpha\right)=$$

$$\frac{4x^2+4\alpha x+2-\alpha}{4}$$

Για $x\in\mathbb{R}$ $g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4x^2+4\alpha x+2-\alpha}{4}=0\Leftrightarrow 4x^2+4\alpha x+2-\alpha=0$ με

$\Delta=16(\alpha^2+\alpha-2)$ Για να είναι η g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ πρέπει $g'(x)>0$,

άρα $\alpha^2+\alpha-2<0\Leftrightarrow(\alpha-1)(\alpha+2)<0\Leftrightarrow-2<\alpha<1$

Αν $\alpha=-2$ ή $\alpha=1$ δηλαδή Δ=0 πάλι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού $g'(x)\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=\frac{-4\alpha}{2\cdot 4}=\frac{-\alpha}{2}$

Επομένως: α=-2, α=-1, α=0, α=1 εφόσον $\alpha\in\Omega$

Άρα $N(A)=4$, $N(\Omega)=7$ και αφού το Ω αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα θα είναι $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{4}{7}$

Είναι $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}=\frac{\alpha+3}{4},\alpha\in\Omega$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο $M\left(\frac{1}{2},g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $4(\alpha-3)x-5y+2=0,\ \alpha\in\Omega$ που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{4(\alpha-3)}{5}$

Συνεπώς θα πρέπει $\lambda g'\left(\frac{1}{2}\right)=-1\Leftrightarrow\frac{4(\alpha-3)}{5}\frac{\alpha+3}{4}=-1\Leftrightarrow(\alpha-3)(\alpha+3)=-5\Leftrightarrow$

$\alpha^2-9=-5\Leftrightarrow\alpha^2=4\Leftrightarrow\alpha=2\in\Omega$ ή $\alpha=-2\in\Omega$

Οπότε $N(B)=2$ και $N(\Omega)=7$ άρα $P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{2}{7}$

Είναι $A\cap B=\{2\}$ άρα $N(A\cap B)=1$ συνεπώς $P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{1}{7}$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου
Γ" πραγματοποιείτε μόνο το ενδεχόμενο Α "

Είναι $P(\Gamma)=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$

φροντιστήρια πουκαμισάς