ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1. Σχολικό βιβλίο σελ. 31

A_2. Σχολικό βιβλίο σελ. 27

A_3. **α** (Σ), **β** (Λ), **γ** (Λ), **δ** (Λ), **ε** (Λ)

ΘΕΜΑ Β

B_1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\left(\kappa x^2-2x\ln x\right)'=2\kappa x-2\ln x-2$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=\left(2\kappa x-2\ln x-2\right)'=2\kappa-\dfrac{2}{x}$

B_2. $f'(1)=2\kappa-2\ln 1-2=2\kappa-2$ και $f''(1)=2\kappa-\dfrac{2}{1}=2\kappa-2$

Επομένως $\left[f'(1)\right]^2+4f''(1)=0\Leftrightarrow(2\kappa-2)^2+4(2\kappa-2)=0$

$$(2\kappa-2)(2\kappa-2+4)=0\Leftrightarrow(2\kappa-2)(2\kappa+2)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=1\ (\text{απορρίπτεται})\\ \text{ή}\\ \kappa=-1\ (\text{δεκτή})\end{cases}$$

B_3. Για $\kappa=-1$ οι συναρτήσεις f και f' γράφονται:

$f(x)=-x^2-2x\ln x\ ,x>0$ και $f'(x)=-2x-2\ln x-2\ ,x>0$

και για κάθε $x>0$ έχουμε: $xf'(x)-f(x)=x(-2x-2\ln x-2)-\left(-x^2-2x\ln x\right)=$

$-2x^2-2x\ln x-2x+x^2+2x\ln x=-x^2-2x$

Δηλαδή $xf'(x)-f(x)=-x^2-2x\ \ (1)$, $x>0$. Η ανίσωση γράφεται διαδοχικά

$$xf'(x)>f(x)-2x^2\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)+2x^2>0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}-x^2-2x+2x^2>0\Leftrightarrow x^2-2x>0$$

$$x(x-2)>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x-2>0\Leftrightarrow x>2$$

φροντιστήρια πουκαμισάς

Β₄. $f(1)=\kappa$ και $f'(1)=2\kappa-2$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ είναι: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, δηλαδή

$y-\kappa=(2\kappa-2)(x-1)$ ή $y=2(\kappa-1)x+2-\kappa$

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\left(\alpha x^3-\beta x+6\right)'=3\alpha x^2-\beta$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο Α(1,0) και δέχεται σε αυτό εφαπτομένη με κλίση -4, επομένως θα ισχύει ότι:

$f(1)=0$ και $f'(1)=-4$

$f(1)=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta+6=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=-6 \ (1)$, $f'(1)=-4 \Leftrightarrow 3\alpha-\beta=-4 \ (2)$

Λύνοντας το (Σ) των (1) και (2) προκύπτει ότι $\alpha=1$ και $\beta=7$

Γ₂. Για $\alpha=1$ και $\beta=7$ η f γράφεται $f(x)=x^3-7x+6$

Για $x\neq 2$ κοντά στο 2 έχουμε

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{2x^2-4x}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-7x+6}{2x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x-3)}{2x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-3}{2x}=\frac{5}{4}$$

Γ₃. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2-7$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-7=0 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{21}}{3} \text{ ή } x=-\frac{\sqrt{21}}{3}$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x^2-7>0 \Leftrightarrow |x|^2>\frac{7}{3} \Leftrightarrow |x|>\frac{\sqrt{21}}{3} \Leftrightarrow x<-\frac{\sqrt{21}}{3} \text{ ή } x>\frac{\sqrt{21}}{3}$$

Πίνακας μεταβολών της f

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{21}}{3}$		$\frac{\sqrt{21}}{3}$		$+\infty$
f′		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	
			T.M		T.E		

φροντιστήρια πουκαμισάς

Από τον παραπάνω πίνακα διαπιστώνουμε ότι :

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{21}}{3}\right]$ και στο $\left[\frac{\sqrt{21}}{3},+\infty\right)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\sqrt{21}}{3},\frac{\sqrt{21}}{3}\right]$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0=-\frac{\sqrt{21}}{3}$, το $f\left(-\frac{\sqrt{21}}{3}\right)=\frac{14}{9}\sqrt{21}+6$ και τοπικό

ελάχιστο στο $x_1=\frac{\sqrt{21}}{3}$, το $f\left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)=\frac{14}{9}\sqrt{21}+6$

Γ4. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=6x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0 \Leftrightarrow x=0$, $f'(x)>0 \Leftrightarrow 6x>0 \Leftrightarrow x>0$

Πίνακας μεταβολών της f'

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	−	○	+
f'	↘		↗

O.E

Από τον πίνακα μεταβολών της f' διαπιστώνουμε ότι η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης όταν $x=0$ και το ζητούμενο σημείο είναι το $A(0,6)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=\left(e^{2x}\right)'(x-2)^2+\left(e^{2x}\right)\left((x-2)^2\right)'=$

$2e^{2x}(x-2)^2+2e^{2x}(x-2)=2e^{2x}(x-2)(x-1)=2e^{2x}\left(x^2-3x+2\right),\quad x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{2x}\left(x^2-3x+2\right)=0 \overset{e^{2x}>0}{\Leftrightarrow} x=2$ ή $x=1$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2e^{2x}\left(x^2-3x+2\right)>0 \overset{e^{2x}>0}{\Leftrightarrow} x>2$ ή $x<1$

φροντιστήρια πουκαμισάς

Πίνακας μεταβολών της f

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f′		+	0	−	0	+	
f		↗	T.M	↘	T.E	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα διαπιστώνουμε ότι:

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και στο $[2,+\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0=1$, το $f(1)=e^2$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_1=2$, το $f(2)=0$

Δ₂. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=\left[2e^{2x}\left(x^2-3x+2\right)\right]'=2\left(e^{2x}\right)'\left(x^2-3x+2\right)+2e^{2x}\left(x^2-3x+2\right)'=$$

$$4e^{2x}\left(x^2-3x+2\right)+2e^{2x}(2x-3)=2f'(x)+2e^{2x}(2x-3)\ (1)\ ,x\in\mathbb{R}$$

Για $x\neq\frac{3}{2}$ κοντά στο $\frac{3}{2}$ έχουμε

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{f''(x)-2f'(x)}{2x^2-5x+3}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{2e^{2x}(2x-3)}{2x^2-5x+3}=\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{2e^{2x}(2x-3)}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)}=\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{2e^{2x}(2x-3)}{(2x-3)(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{2e^{2x}}{(x-1)}=4e^3$$

Δ₃. **α.** $f(0)=4$ και $f'(0)=4$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$ είναι: $y-f(0)=f'(0)\cdot x$, δηλαδή $y=4x+4$

και τα σημεία τομής της με τους άξονες είναι $A(-1,0)$ και $B(0,4)$

β. Το σημείο Μ είναι εσωτερικό του ΑΒ , επομένως $\alpha\in(-1,0)$ και προφανώς

$0<4\alpha+4<4$

φροντιστήρια πουκαμισάς

$$E=(OKM\Lambda)=(OK)\cdot(O\Lambda)=|\alpha|\cdot|\beta|=|\alpha|\cdot|4\alpha+4|\underset{0<4\alpha+4<4}{\overset{-1<\alpha<0}{=}}$$

$$-\alpha\cdot(4\alpha+4)=-4\alpha^2-4\alpha\ \ ,\alpha\in(-1,0)$$

Θεωρούμε $E(\alpha)=-4\alpha^2-4\alpha,\ \ \alpha\in(-1,0)$

$$E'(\alpha)=-8\alpha-4,\ \alpha\in(-1,0),\ E'(\alpha)=0\Leftrightarrow-8\alpha-4=0\Leftrightarrow\alpha=-\frac{1}{2}$$

$$E'(\alpha)>0\Leftrightarrow-8\alpha-4>0\Leftrightarrow\alpha<-\frac{1}{2}$$

α	-1		$-\frac{1}{2}$		0
E'		$+$	0	$-$	
E		$\nearrow$		$\searrow$	

Ο.Μ

Από τον πίνακα μεταβολών της E διαπιστώνουμε

ότι το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $\alpha=-\frac{1}{2}$