Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1ο

α) Είναι $y_i=(2x_i-1)^2 \Leftrightarrow y_i=4x_i^2-4x_i+1$ για i=1,2,…,ν, έτσι

$y_1=4x_1^2-4x_1+1$

$y_2=4x_2^2-4x_2+1$

$y_3=4x_3^2-4x_3+1$

……

$y_\nu=4x_\nu^2-4x_\nu+1,$

όπου με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε

$y_1+y_2+\ldots+y_\nu=4(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_\nu^2)-4(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)+\nu$, άρα

$$\frac{y_1+y_2+\ldots+y_\nu}{\nu}=\frac{4(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_\nu^2)}{\nu}-\frac{4(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)}{\nu}+\frac{\nu}{\nu}\Leftrightarrow$$

$$\bar{y}=4\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-4\bar{x}+1 \qquad (1)$$

Έχουμε $s_x=2\Leftrightarrow s_x^2=4\Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu}\right]=4\Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu^2}=4\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}\right)^2=4\Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2=4\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\left(\bar{x}\right)^2=4\Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2=\left(\bar{x}\right)^2+4 \qquad (2)$$

Η (1) λόγω της (2) γίνεται

$$\bar{y}=4\left[\left(\bar{x}\right)^2+4\right]-4\bar{x}+1\Leftrightarrow 65=16+4\left(\bar{x}\right)^2-4\bar{x}+1\Leftrightarrow$$

$$4\left(\bar{x}\right)^2-4\bar{x}-48=0\Leftrightarrow\left(\bar{x}\right)^2-\bar{x}-12=0,$$

άρα $\bar{x}=-3$ το οποίο απορρίπτεται αφού $x_i>0$ ή $\bar{x}=4$

β) $CV_x=\frac{s_x}{\bar{x}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=50\%$

γ) Επειδή $CV_x=50\%>10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές. Θεωρούμε τη μεταβλητή Τ με $t_i=x_i+c$. Τότε $\bar{t}=\bar{x}+c=4+c$ και $s_t=s_x=2$. Για να είναι το νέο δείγμα ομοιογενές πρέπει:

$$CV_t\le 10\%=0,1\Leftrightarrow\frac{s_t}{|\bar{t}|}\le 0,1\Leftrightarrow\frac{2}{|4+c|}\le 0,1\overset{4+c>0}{\Leftrightarrow}\frac{2}{4+c}\le 0,1\Leftrightarrow$$

$0,1(4+c)\ge 2\Leftrightarrow c\ge 16$, άρα η ελάχιστη τιμή του c είναι 16

δ) Είναι: $\bar{z}=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}z_i=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}x_i^2\overset{(2)}{=}4+\left(\bar{x}\right)^2=20$

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι $P\left[(A-B)]\cup(B-A)\right]=\frac{1}{6}\Leftrightarrow P(A-B)+P(B-A)=\frac{1}{6}$

(αφού $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$)

Οπότε $P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{6}\Leftrightarrow$

$P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ (1)

Όμως $P(A)+P(B)=\frac{2}{x^2+3}$ άρα η (1) γίνεται

φροντιστήρια πουκαμισάς

$$\frac{2}{x^2+3}-2P(A\cap B)=\frac{1}{6}\Leftrightarrow 2P(A\cap B)=\frac{2}{x^2+3}-\frac{1}{6}\Leftrightarrow 2P(A\cap B)=\frac{9-x^2}{6(x^2+3)}\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\frac{9-x^2}{6(x^2+3)}, x\in\mathbb{R} \quad (2)$$

Είναι $0\le P(A\cap B)\le 1$

$$0\le 2P(A\cap B)\le 2\overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0\le\frac{9-x^2}{6(x^2+3)}\le 2$$

Έτσι έχουμε:

$$\left(0\le\frac{9-x^2}{6(x^2+3)} \text{ και } \frac{9-x^2}{6(x^2+3)}\le 2\right)\Leftrightarrow \left(0\le 9-x^2 \text{ και } \frac{9-x^2-12x^2-36}{6(x^2+3)}\le 0\right)\Leftrightarrow$$

$(-3\le x\le 3$ και $-13x^2-27\le 0$, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow$

$-3\le x\le 3$

Επομένως, $f(x)=\dfrac{9-x^2}{6(x^2+3)}$ με $x\in[-3,3]$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-3,3]$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$f'(x)=\frac{1}{6}\left(\frac{9-x^2}{x^2+3}\right)'=\frac{1}{6}\cdot\frac{\left(9-x^2\right)'\left(x^2+3\right)-\left(9-x^2\right)\left(x^2+3\right)'}{\left(x^2+3\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{-2x\left(x^2+3\right)-\left(9-x^2\right)2x}{\left(x^2+3\right)^2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{\left(x^2+3\right)^2}\left(x^2+3+9-x^2\right)=$$

$$=-\frac{4x}{\left(x^2+3\right)^2}, x\in[-3,3]$$

Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x είναι $f'(x)=-\dfrac{4x}{\left(x^2+3\right)^2}$ και όταν

$x=0$ γίνεται $f'(0)=0$

γ) Για $x\in[-3,3]$ είναι $f'(x)=-\dfrac{4x}{\left(x^2+3\right)^2}$ οπότε $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ και

$f'(x)>0\Leftrightarrow -4x>0\Leftrightarrow x<0$ αφού $\left(x^2+3\right)^2>0$ για κάθε $x\in[-3,3]$. Συνεπώς,η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,3]$ άρα παρουσιάζει μέγιστη τιμή όταν x=0 την $f(0)=\dfrac{1}{2}$. Άρα για κάθε $x\in[-3,3]$ ισχύει

x	-3		0		3
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

$$f(x)\le\frac{1}{2}\overset{\text{υποθ}}{\Leftrightarrow}2P(A\cap B)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow P(A\cap B)\le\frac{1}{4}$$

δ) Έστω Γ το ενδεχόμενο:
"κανένα από τα Α, Β δεν πραγματοποιείται".

Τότε $\Gamma=(A\cup B)'$ και $P(\Gamma)=P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)=$

$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}$ αφού όταν $P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$ (μέγιστη τιμή της $P(A\cap B)$) τότε x=0 και επομένως

$$P(A)+P(B)=\frac{2}{0+3}=\frac{2}{3}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x)=\left(-\left[P(B)-2x\right]^2\right)'+4P(B-A)\left[P(A\cap B)-x\right]'=$$

$$=-2\left[P(B)-2x\right]\left[P(B)-2x\right]'-4P(B-A)=4\left[P(B)-2x\right]-4P(B-A)=$$

$$=4\left[P(B)-P(B-A)-2x\right]=4\left[P(B)-P(B)+P(A\cap B)-2x\right]==4\left[P(A\cap B)-2x\right]$$

Άρα $f'(x)=4\left[P(A\cap B)-2x\right],x\in\mathbb{R}$

φροντιστήρια πουκαμισάς

β) Θέτουμε $f'(x)=0 \overset{\alpha)}{\Leftrightarrow} 4[P(A\cap B)-2x]=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{P(A\cap B)}{2}$ Ακόμη

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{P(A\cap B)}{2}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$\left(-\infty,\dfrac{P(A\cap B)}{2}\right]$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{P(A\cap B)}{2},+\infty\right)$.

Επομένως η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή στο $x=\dfrac{P(A\cap B)}{2}$ την

$f\left(\dfrac{P(A\cap B)}{2}\right)=0$ (από υπόθεση).

x	-∞	P(A∩B)/2	+∞
f'	+	0	−
f	↗		↘

γ) Από ερώτημα β) έχουμε:

$$f\left(\frac{P(A\cap B)}{2}\right)=0 \Leftrightarrow -[P(B)-P(A\cap B]^2+4P(B-A)\left[P(A\cap B-\frac{P(A\cap B}{2}\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$-[P(B-A)]^2+2P(B-A)P(A\cap B)=0 \Leftrightarrow P(B-A)[2P(A\cap B)-P(B-A)]=0$$

οπότε $P(B-A)=0$ ή $2P(A\cap B)-P(B-A)=0$

Αλλά $P(B-A)=0$ αδύνατο γιατί:

$(B-A)\cup(A\cap B)=B$ και $(B-A)$, $(A\cap B)$ ασυμβίβαστα άρα

$P((B-A)\cup(A\cap B))=P(B) \Leftrightarrow P(B-A)+P(A\cap B)=P(B) \Leftrightarrow P(A\cap B)=P(B)$

αδύνατο από υπόθεση.

Τελικά

$2P(A\cap B)-P(B-A)=0 \Leftrightarrow 2P(A\cap B)-P(B)+P(A\cap B)=0$

$\Leftrightarrow P(B)=3P(A\cap B)$ (1)

Όμως από υπόθεση $P(A\cap B)=\dfrac{1}{9}$ άρα η (1) δίνει:

$$P(B)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{1}{3} \overset{\upsilon\pi o\theta}{\Leftrightarrow} \frac{30}{N(\Omega)}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow N(\Omega)=90$$

Από το Μαθηματικό Τμήμα
των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου
συνεργάστηκαν : Γ. Ανδρουλιδάκης, Μ. Μπαρμπούνη