Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Θέμα 1ο

Δίνονται οι σχέσεις: $u_1+u_2z+u_3z^2=0$, $w=\dfrac{z+i}{z-i}$, $z\neq i$ με $z,u\in\mathbb{C}$ και $w\in I$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z, M(z) ανήκουν σε κύκλο κέντρου O(ο,ο) και ακτίνας ρ=1.

β) Αν $|w|=1$ και $z\neq -1$

i) να βρεθεί ο μιγαδικός ζ

ii) να υπολογίσετε τον w^{2015}.

iii) να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν μιγαδικοί w τέτοιοι ώστε:

$$\left|\frac{w^k+2i}{\overline{w}^k-2i}\right|+\left|\frac{w^\lambda+3i}{\overline{w}^\lambda-3i}\right|+\left|\frac{w^\mu+4i}{\overline{w}^\mu-4i}\right|=1,\ \kappa,\lambda,\mu\in\mathbb{N}.$$

γ) Να αποδείξετε ότι $\overline{u_3}+\overline{u_2}z+\overline{u_1}z^2=0$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\left||u_1|^2-|u_3|^2\right|=\left|\overline{u_3}u_2-\overline{u_2}u_1\right|$.

Θέμα 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\begin{cases}\alpha\left(x-\alpha^2\right)e^x, & x<1\\ \ln x, & x\geq 1\end{cases}$ με $\alpha\neq 0$

για την οποία ισχύει $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in(-1,1)$,

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ και $h(x)=\dfrac{f\left(-x^2\right)}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι α=1.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $g(x)=\begin{cases}e^x(x-2)+2, & x<1\\ x(\ln x-1)+3-e, & x\geq 1\end{cases}$

δ) Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία και να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{x+1}^{x}h(t)dt$

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $w(x)=\int_x^1 h(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$ τον άξονα χ'χ και τις ευθείες χ=ο, χ=1.

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργαστήκαν: Γ.Ανδρουλιδάκης, Μ.Βυνιχάκης, Α.Δουλγεράκης, Η.Μαργαρίτη, Μ.Μπαρμπούνη, Ζ.Μπομπότη, Α.Τσιλιφώνης, Π.Σιδερής.