Απαντήσεις

Θέμα 1ο

α) Ισχύει η πρόταση $w \in I \Leftrightarrow w = -\overline{w}$ αφού

$$w = -\overline{w} \Leftrightarrow x + yi = -(x - yi) \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow w \in I$$

Τότε $w = \dfrac{z+i}{z-i}$ και $w \in I$ άρα

$$w \in I \Leftrightarrow w = -\overline{w} \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = -\left(\frac{\overline{z+i}}{z-i}\right) \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = -\frac{\overline{z+i}}{\overline{z-i}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{z+i}{z-i} = -\frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i} \Leftrightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = -(z-i)(\overline{z}-i) \Leftrightarrow$$

$$z\overline{z} + zi + \overline{z}i - 1 = -z\overline{z} + zi + \overline{z}i + 1 \Leftrightarrow 2|z|^2 = 2 \Leftrightarrow |z| = 1$$

Άρα οι εικόνες του z, M(z) ανήκουν σε κύκλο κέντρου O(ο,ο) και ακτίνας ρ=1.

β)i) Αφού $|w| = 1$ και $w = \dfrac{z+i}{z-i}$, $z \neq i$ και $z \neq -1$ έχουμε:

$$|w| = \left|\frac{z+i}{z-i}\right| \Leftrightarrow 1 = \left|\frac{z+i}{z-i}\right| \Leftrightarrow 1 = \frac{|z+i|}{|z-i|} \Leftrightarrow |z-i| = |z+i| \Leftrightarrow$$

$$|x + yi - i| = |x + yi + i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow y = 0$$

Αλλά οι εικόνες του z, M(z) ανήκουν σε κύκλο κέντρου O(ο,ο) και ακτίνας ρ=1 άρα $x^2 + y^2 = 1$ συνεπώς

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \text{ άρα } z = 1 \text{ ή } z = -1$$

Τελικά $z = 1$ αφού ο $z = -1$ απορρίπτεται από υπόθεση.

ii) Για $z = 1$ ο w^{2015} γίνεται:

$$w^{2015} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2015} = \left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^{2015} = \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^{2015} = i^{2015} =$$

$$i \cdot i^{2014} = i\left(i^2\right)^{1007} = i(-1)^{1007} = -i$$

iii) Έστω ότι υπάρχουν μιγαδικοί w για τους οποίους ισχύει:

$$\left|\frac{w^k + 2i}{\overline{w}^k - 2i}\right| + \left|\frac{w^\lambda + 3i}{\overline{w}^\lambda - 3i}\right| + \left|\frac{w^\mu + 4i}{\overline{w}^\mu - 4i}\right| = 1$$

Τότε $\left|\dfrac{w^k+2i}{\overline{w}^k-2i}\right|=\dfrac{\left|w^k+2i\right|}{\left|\overline{w}^k-2i\right|}=\dfrac{\left|\overline{w^k+2i}\right|}{\left|\overline{w}^k-2i\right|}=\dfrac{\left|\overline{w}^k-2i\right|}{\left|\overline{w}^k-2i\right|}=1$

με ανάλογο τρόπο και $\left|\dfrac{w^\lambda+2i}{\overline{w}^\lambda-2i}\right|=1$, $\left|\dfrac{w^\mu+2i}{\overline{w}^\mu-2i}\right|=1$ τότε

$\left|\dfrac{w^k+2i}{\overline{w}^k-2i}\right|+\left|\dfrac{w^\lambda+3i}{\overline{w}^\lambda-3i}\right|+\left|\dfrac{w^\mu+4i}{\overline{w}^\mu-4i}\right|=1\Leftrightarrow 3=1$ άτοπο, άρα δεν υπάρχουν μιγαδικοί w για τους οποίους ισχύει η αρχική σχέση.

γ) Από ερώτημα α) έχουμε $|z|=1\Leftrightarrow |z|^2=1\Leftrightarrow z\overline{z}=1\Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{1}{z}$

$u_1+u_2z+u_3z^2=0\Leftrightarrow \overline{u_1+u_2z+u_3z^2}=0\Leftrightarrow \overline{u_1}+\overline{u_2}\,\overline{z}+\overline{u_3}\,\overline{z}^2=0\Leftrightarrow$

$\overline{u_1}+\overline{u_2}\dfrac{1}{z}+\overline{u_3}\dfrac{1}{z^2}=0\Leftrightarrow z^2\overline{u_1}+z\overline{u_2}+\overline{u_3}=0$.

δ) Από την σχέση $u_1+u_2z+u_3z^2=0$ και αφού $|z|=1$ έχουμε:

$u_1+u_2z+u_3z^2=0\Leftrightarrow \overline{z}u_1+u_2z\overline{z}+u_3\overline{z}z^2=0\Leftrightarrow \overline{z}u_1+u_2+u_3z=0\Leftrightarrow$

$u_2=-\overline{z}u_1-u_3z$. Τότε

$\left|\overline{u_3}u_2-\overline{u_2}u_1\right|=\left|\overline{u_3}(-\overline{z}u_1-u_3z)-(-z\overline{u_1}-\overline{u_3}\,\overline{z})u_1\right|=$

$\left|-\overline{u_3}\,\overline{z}u_1-z|u_3|^2+z|u_1|^2+\overline{u_3}\,\overline{z}u_1\right|=\left|z\left(|u_1|^2-|u_3|^2\right)\right|=\left||u_1|^2-|u_3|^2\right|$

Θέμα 2ο

α) Ισχύει $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in(-1,1)$ άρα η f παρουσιάζει στο $x_0=0$ ακρότατο. Το $x_0=0$ είναι εσωτερικό σημείο του $(-1,1)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ ως γινόμενο πολυωνυμικής και εκθετικής. Συνεπώς ισχύει το Θεώρημα Fermat άρα

$f'(0)=0$

Για κάθε $x<1$ η f είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο πολυωνυμικής και εκθετικής με

$f'(x)=\alpha e^x+\alpha\left(x-\alpha^2\right)e^x=e^x\left(\alpha+\alpha x-\alpha^3\right)$

$f'(0)=0\Leftrightarrow \alpha-\alpha^3=0\Leftrightarrow \alpha\left(1-\alpha^2\right)=0\Leftrightarrow$

$\alpha=0$ απορρίπτεται αφού $\alpha\neq 0$ από υπόθεση ή $\alpha=\pm 1$.

• Για $\alpha=-1$ και για κάθε $x<1$ έχουμε:

$f(x)=-(x-1)e^x$

Η f είναι συνεχής ως γινόμενο πολυωνυμικής και εκθετικής.

Η f είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο πολυωνυμικής και εκθετικής με

$f'(x)=-e^x-(x-1)e^x=-xe^x$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow -xe^x>0 \Leftrightarrow -x>0 \Leftrightarrow x<0$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow -xe^x<0 \Leftrightarrow -x<0 \Leftrightarrow x>0$

Συνεπώς η f παρουσιάζει για x=ο μέγιστο το $f(0)$ άρα για κάθε $x<1$ ισχύει $f(x)\le f(0)$.

x	$-\infty$	0	1
f'	+	0	−
f	↗		↘

Άτοπο γιατί από υπόθεση $f(x)\ge f(0)$ άρα η τιμή $\alpha=-1$ απορρίπτεται.

• Για $\alpha=-1$ και για κάθε $x<1$ έχουμε:

$f(x)=(x-1)e^x$

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow xe^x>0 \Leftrightarrow x>0$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow xe^x<0 \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	0	1
f'	−	0	+
f	↘		↗

Συνεπώς η f παρουσιάζει για x=ο ελάχιστο το $f(0)$ άρα για κάθε $x<1$ ισχύει $f(x)\ge f(0)$ άρα η τιμή $\alpha=1$ είναι δεκτή.

β) Για $\alpha=1$ η συνάρτηση f γίνεται: $f(x)=\begin{cases}(x-1)e^x, & x<1\\ \ln x, & x\ge 1\end{cases}$

Για κάθε $x<1$ η f είναι συνεχής ως γινόμενο πολυωνυμικής και εκθετικής.

Για κάθε $x>1$ η f είναι συνεχής ως λογαριθμική.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left((x-1)e^x\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x)=0\\ f(1)=0\end{array}\right\}\text{ άρα } \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$$

άρα η f είναι συνεχής και στο $x=1$. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x<1$ έχουμε:

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x (t-1)e^t dt=\int_0^x (t-1)\left(e^t\right)' dt=$$

$$\left[(t-1)e^t\right]_0^x-\int_0^x e^t dt=(x-1)e^x+1-\left[e^t\right]_0^x=(x-1)e^x+1-e^x+1=$$

$$(x-2)e^x+2$$

Για κάθε $x\geq 1$ έχουμε:

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt=\int_0^1 (t-1)e^t dt+\int_1^x \ln t dt=$$

$x(\ln x-1)+3-e$ γιατί:

- $\int_0^1 (t-1)e^t dt=\left[(t-1)e^t\right]_0^1-\int_0^1 e^t dt=1-\left[e^t\right]_0^1=2-e$
- $\int_1^x \ln t dt=\int_1^x t'\ln t dt=\left[t\ln t\right]_1^x-\int_1^x dt=x\ln x-\left[t\right]_1^x=x(\ln x-1)+1$

άρα $g(x)=\begin{cases} e^x(x-2)+2, & x<1 \\ x(\ln x-1)+3-e, & x\geq 1 \end{cases}$

δ) Έχουμε: $h(x)=\dfrac{f(-x^2)}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$

Επειδή $-x^2\leq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα είναι:

$f(-x^2)=(-x^2-1)e^{-x^2}=-(x^2+1)e^{-x^2}$ άρα

$$h(x)=\frac{f(-x^2)}{x^2+1}=\frac{-(x^2+1)e^{-x^2}}{x^2+1}=-e^{-x^2},\ x\in\mathbb{R}$$

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων με

$h'(x)=2xe^{-x^2}$ και $h'(0)=0$

$h'(x)>0\Leftrightarrow 2xe^{-x^2}>0\Leftrightarrow x>0$

$h'(x)<0\Leftrightarrow 2xe^{-x^2}<0\Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h′	−	0	+
h	↘		↗

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

Για κάθε $x<-1$ και για κάθε t με $x\leq t\leq x+1$ έχουμε:

$$x\leq t\leq x+1\Leftrightarrow h(x)\geq h(t)\geq h(x+1)\Leftrightarrow -e^{-(x+1)^2}\leq h(t)\leq -e^{-x^2}$$

Οι συναρτήσεις h, $-e^{-x^2}$, $-e^{-(x+1)^2}$ είναι συνεχείς ως συνθέσεις και $x<x+1$ άρα

$$\int_x^{x+1} -e^{-(x+1)^2}dt\leq\int_x^{x+1} h(t)dt\leq\int_x^{x+1} -e^{-x^2}dt\Leftrightarrow$$

$$-e^{-(x+1)^2}\int_x^{x+1} dt \le \int_x^{x+1} h(t)dt \le -e^{-x^2}\int_x^{x+1} dt \Leftrightarrow$$

$$-e^{-(x+1)^2}[t]_x^{x+1} \le \int_x^{x+1} h(t)dt \le -e^{-x^2}[t]_x^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$-e^{-(x+1)^2} \le \int_x^{x+1} h(t)dt \le -e^{-x^2} \Leftrightarrow -e^{-(x+1)^2} \le -\int_{x+1}^{x} h(t)dt \le -e^{-x^2} \Leftrightarrow$$

$$e^{-x^2} \le \int_{x+1}^{x} h(t)dt \le e^{-(x+1)^2}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-(x+1)^2} = 0$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{x+1}^{x} h(t)dt = 0$

ε) Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει από τον τύπο:

$$E=\int_0^1 |w(x)|dx$$

$$w(x)=\int_x^1 h(t)dt = -\int_1^x h(t)dt = -\int_1^x -e^{-t^2}dt = \int_1^x e^{-t^2}dt$$

Η e^{-x^2} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η w παραγωγίσιμη με

$w'(x)=\left(\int_1^x e^{-t^2}dt\right)' = e^{-x^2} > 0$ άρα η w είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς για κάθε $x<1 \Leftrightarrow w(x)<w(1) \Leftrightarrow w(x)<0$ άρα

$$E=\int_0^1 |w(x)|dx = \int_0^1 -w(x)dx = \int_0^1 (-1)\int_1^x e^{-t^2}dtdx = \int_0^1 (-x)'\int_1^x e^{-t^2}dtdx =$$

$$\left[-x\int_1^x e^{-t^2}dt\right]_0^1 + \int_0^1 xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2e}+\frac{1}{2} = \frac{e-1}{2e}\ \text{τ. μ}$$

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργαστήκαν: Γ.Ανδρουλιδάκης, Μ.Βυνιχάκης, Α.Δουλγεράκης, Η.Μαργαρίτη, Μ.Μπαρμπούνη, Ζ.Μπομπότη, Α.Τσιλιφώνης, Π.Σιδερής.