Απαντήσεις

Θέμα 1ο

α) i) Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(ο,2) ισχύει: $f(0)=2 \Rightarrow 0^3-2\cdot 0^2-\frac{(\overline{x})}{11}\cdot 0+s=2 \Leftrightarrow s=2$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=(x^3-2x^2-\frac{(\overline{x})}{11}x+s)'=3x^2-2\cdot 2x-\frac{(\overline{x})}{11}\cdot 1+0=3x^2-4x-\frac{(\overline{x})}{11}$ και η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α(ο,2) με τον χ΄χ είναι $\frac{\pi}{4}$ άρα: $f'(0)=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 3\cdot 0^2-4\cdot 0-\frac{(\overline{x})}{11}=1 \Leftrightarrow \overline{x}=-11.$

Συνεπώς ο τύπος της συνάρτησης είναι: $f(x)=x^3-2x^2+x+2$.

ii) Ο τύπος της εφαπτομένης είναι : $y=f'(0)x+\beta \Leftrightarrow y=x+\beta$ και διέρχεται από το Α(ο,2) το σημείο επαφής, συνεπώς το σημείο επαληθεύει τον τύπο της : $2=0+\beta \Leftrightarrow \beta=2$, δηλαδή ο τύπος της είναι: $y=x+2$.

iii) Τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες είναι: Α(ο,2) με τον y΄y και για τον χ΄χ έχουμε: $y=0 \Rightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$, το σημείο είναι το Β(-2,ο) επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $(OAB)=\frac{(OA)\cdot(OB)}{2}=\frac{2\cdot 2}{2}=2$ τ. μ.

β) i) Είναι: $CV=\frac{S}{|\overline{X}|}=\frac{2}{11}>\frac{1}{10}$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ii) Έστω c ένας αριθμός που αν προστεθεί σε όλες τις θερμοκρασίες τότε το δείγμα θα γίνει ομοιογενές, ενώ οι τιμές της μεταβλητής θα γίνουν: $y_i=x_i+c$ και για τη νέα μέση τιμή $\overline{y}$ έχουμε:

$$\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{v} y_i v_i}{v}=\frac{\sum_{i=1}^{v}(x_i+c)v_i}{v}=\frac{\sum_{i=1}^{v} x_i v_i}{v}+\frac{\sum_{i=1}^{v} c v_i}{v}=\overline{x}+c\frac{v}{v}=\overline{x}+c$$

ενώ για τη νέα διακύμανση

$$s_y^2=\frac{\sum_{i=1}^{v}(y_i-\bar{y})^2\cdot v_i}{v}=\frac{\sum_{i=1}^{v}[(x_i+c)-(\bar{x}+c)]^2\cdot v_i}{v}=\frac{\sum_{i=1}^{v}(x_i-\bar{x})^2\cdot v_i}{v}=s^2$$

επομένως η τυπική απόκλιση δεν αλλάζει και ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι: $CV_y=\frac{s_y}{|\bar{y}|}=\frac{s}{|\bar{x}+c|}$.

Το δείγμα είναι πλέον ομοιογενές επομένως ο συντελεστής μεταβολής είναι κάτω του 10%, συνεπώς έχουμε:

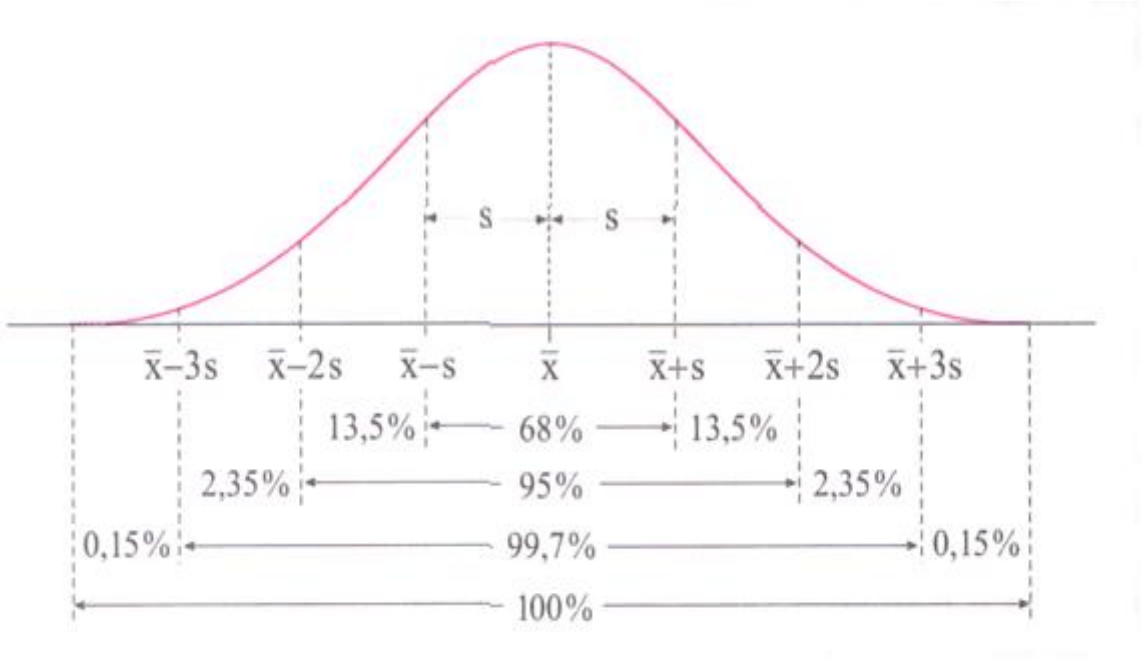
$$CV_y<\frac{1}{10}\Leftrightarrow\frac{s}{|\bar{x}+c|}<\frac{1}{10}\Leftrightarrow\frac{2}{|-11+c|}<\frac{1}{10}\Leftrightarrow|c-11|>20$$

το οποίο μας δίνει:

$c-11>20\Leftrightarrow c>31$ ή $c-11<-20\Leftrightarrow c<-9$

Υπολογίζοντας ότι η Βραζιλία έχει καλοκαιρία θα έχει μέσο όρο θερμοκρασιών μεγαλύτερο από : -11+31=20 ^{o}C ενώ η Αλάσκα μικρότερο από :-11-9=-20 ^{o}C.

iii) Επειδή η κατανομή είναι περίπου κανονική ισχύουν τα



εξής:

$\delta=\bar{x}=-11^{o}C$, $R\simeq 6\cdot s\Rightarrow R\simeq 12^{o}C$ ενώ μεταξύ των τιμών:

• $\bar{x}-s=-13^{o}C$, $\bar{x}+s=-9^{o}C$ βρίσκεται το 68% των παρατηρήσεων.

• $\bar{x}-2s=-15^{o}C$, $\bar{x}+2s=-7^{o}C$ βρίσκεται το 95% των παρατηρήσεων.

• $\bar{x}-3s=-17^{o}C$, $\bar{x}+3s=-5^{o}C$ βρίσκεται το 99,7% των παρατηρήσεων.

1) Πάνω από -11°C δηλαδή πάνω από τη διάμεσο βρίσκεται το 50% των παρατηρήσεων δηλαδή 100 πόλεις.

2) Μεταξύ -13°C και -7°C βρίσκεται το : $68\%+13,5\%=81,5\%$ δηλαδή : $0,815\cdot 200=163$ πόλεις.

3) Έως -9°C βρίσκεται το : $0,15\%+2,35\%+13,5\%+68\%=84\%$ δηλαδή: $0,84\cdot 200=168$ πόλεις.

Θέμα 2°

α) $x_1^2+x_2^2+...+x_\nu^2=17\nu s^2$ δηλαδή $\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2=17\nu s^2$. Γνωρίζουμε ότι: $s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu}\right\}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2}{\nu}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}\right)^2=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2}{\nu}-\bar{x}^2$

άρα $s^2=\frac{17\nu s^2}{\nu}-\bar{x}^2 \Leftrightarrow s^2=17s^2-\bar{x}^2 \Leftrightarrow -16s^2=-\bar{x}^2 \Leftrightarrow$

$\left(\frac{s}{\bar{x}}\right)^2=\frac{1}{16} \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}}=\pm\frac{1}{4}$

όμως $CV>0$ άρα $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{1}{4}$ ή $CV=25\%$.

β) i) Κάθε μια από τις παρατηρήσεις αυξήθηκε κατά 2 οπότε ο νέος CV που προέκυψε είναι $CV_y=\frac{s_y}{|\bar{y}|}=\frac{s}{\bar{x}+2}=0,2$ διότι $s_y=s$ και $\bar{y}=\bar{x}+2$.

Όμως από (i) έχουμε $\frac{s}{\bar{x}}=\frac{1}{4}$ δηλαδή $s=\frac{1}{4}\bar{x}$. Τελικά

$\frac{\frac{1}{4}\bar{x}}{\bar{x}+2}=0,2 \Leftrightarrow \frac{\bar{x}}{4}=0,2\bar{x}+0,4 \Leftrightarrow \bar{x}=0,8\bar{x}+1,6 \Leftrightarrow$

$0,2\overline{x}=1,6 \Leftrightarrow \overline{x}=8$ και $s=\frac{8}{4}=2$

ii) Η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$ για $\overline{x}=8$ και $s=2$ είναι η $y=8x-2$, άρα ισχύει $f'(1)=8$.

Η $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+4$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=3x^2+2\alpha x+\beta$.

Επομένως $f'(1)=8 \Leftrightarrow 3+2\alpha+\beta=8 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=5$. Επίσης το $M(1,f(1))$ είναι σημείο επαφής, άρα ανήκει στην εφαπτομένη $y=8x-2$ οπότε $f(1)=8\cdot 1-2=6$.

Όμως $f(1)=1+\alpha+\beta+4 \Leftrightarrow \alpha+\beta=1$ και καταλήγουμε στο σύστημα $\begin{cases} 2\alpha+\beta=5 \\ \alpha+\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha=4$ και $\beta=-3$

iii) Για $\alpha=4$ και $\beta=-3$ είναι $f(x)=x^3+4x^2-3x+4$ και $f'(x)=3x^2+8x-3, x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+8x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ ή $x=-3$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x^2+8x-3>0 \Leftrightarrow x<-3$ ή $x>\frac{1}{3}$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 3x^2+8x-3<0 \Leftrightarrow -3<x<\frac{1}{3}$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	-3		$1/3$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-3]$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-3,\frac{1}{3}\right]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$.

iv) Η $f(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f''(x)=6x+8$, άρα

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+4x^2-3x+4+6x+8-12}{5-\sqrt{22-x}}=\lim_{x\to -3}\frac{x^3+4x^2+3x}{5-\sqrt{22-x}}=$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x(x^2+4x+3)}{5-\sqrt{22-x}}=\lim_{x\to -3}\frac{x\cancel{(x+3)}(x+1)(5+\sqrt{22-x})}{\cancel{3+x}}=$$

$$=-3\cdot(-2)\cdot 10=60.$$

Άρα $\sum_{i=1}^{v}(x_i-8)^2=60 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{v}(x_i-\overline{x})^2=60$

Ισχύει $s^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}(x_i-\overline{x})^2 \Leftrightarrow 4=\frac{60}{v} \Leftrightarrow v=15$ και

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{v}x_i}{v} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{v}x_i=\overline{x}\cdot v=8\cdot 15=120.$$

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργαστήκαν: Γ.Ανδρουλιδάκης, Μ.Βυνιχάκης, Α.Δουλγεράκης, Η.Μαργαρίτη, Μ.Μπαρμπούνη, Α.Τσιλιφώνης, Π.Σιδερής.