Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Θέμα 1ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$f'(x)=f(x)+e^x\sigma\upsilon\nu x$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=x\cdot\sigma\upsilon\nu x,\ x\in[0,\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x\eta\mu x$ για $x\in[0,\pi]$.

β) i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) i) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0=0$, κοινή εφαπτομένη την οποία και να βρείτε.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq g(x),\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

δ) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} για $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Θέμα 2ο

Αν $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις ώστε να ισχύουν :

$f\big(g(x)\big)g(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$ και $f'\big(g(x)\big)g'(x)=\frac{1-x}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$

με g(0)=1.

α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο A(1,g(1)) είναι η y=g(1)x.

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\frac{\ln x}{x},\ x\in(0,+\infty)$ και ότι είναι κοίλη στο $\left(0,e\sqrt{e}\right]$ καθώς επίσης ότι η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη x=1.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των f, g και των ευθειών χ=1 και χ=ln3.

ε) Να δείξετε ότι $e^{\sqrt{6-2e}} > \ln 3$

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν:
Γ.Ανδρουλιδάκης, Μ.Βυνιχάκης, Α.Δουλγεράκης, Η.Μαργαρίτη, Μ.Μπαρμπούνη, Ζ.Μπομπότη, Π.Σιδερής, Α.Τσιλιφώνης