ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

α)Η συνιστάμενη των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι μηδενική , συνεπώς η στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$ πρέπει να έχει τη φορά που φαίνεται στο σχήμα ώστε να επιταχύνει το σώμα.

Ισχύει ότι $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R_2$, αφού το σώμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Επίσης $\Sigma F_x = M \cdot \alpha_{cm}$ ή $F_1 + T_{\sigma\tau} - F_2 = M \cdot \alpha_{cm}$ (1) και $\Sigma\tau_{(o)} = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$

ή $F_1 \cdot R_1 - T_{\sigma\tau} \cdot R_2 + F_2 \cdot R_1 = I \cdot \frac{\alpha_{cm}}{R_2}$ (2)

Από το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει ότι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του σώματος είναι ίση με

$\alpha_{cm} = 1\frac{m}{s^2}$ και η γωνιακή επιτάχυνση του ίση με $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cm}}{R_2}$ ή

$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{0,2}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 5\frac{rad}{s^2}$

Για το χρονικό διάστημα t_{AB} που απαιτείται για να διανύσει το σώμα την απόσταση ΑΒ ισχύει:

$S_{AB} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{cm} \cdot t_{AB}^2$ ή $2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot t_{AB}^2$ ή $t_{AB}^2 = 4$ ή $t_{AB} = 2s$

Συνεπώς η γωνιακή ταχύτητα του σώματος στο σημείο Β είναι:

$\omega_B = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t_{AB}$ ή $\omega_B = 5 \cdot 2 = 10\frac{rad}{s}$.

Άρα για την στροφορμή του σώματος προκύπτει:

$L_B = I \cdot \omega_B$ ή $L_B = 0,02 \cdot 10$ ή $L_B = 0,2kg \cdot \frac{m^2}{s}$

β)Η γωνιακή μετατόπιση του σώματος στο τμήμα ΑΒ της τροχιάς του θα είναι $\theta_{AB} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t_{AB}^2$ ή $\theta_{AB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4$ ή $\theta_{AB} = 20rad$

Ο αριθμός των περιστροφών του σώματος που αντιστοιχούν σ' αυτή τη μετατόπιση είναι $N_{AB} = \frac{\theta_{AB}}{2\pi}$ ή $N_{AB} = \frac{10}{2\pi}$ ή

$N_{AB} = \frac{5}{\pi}$ περιστροφές

Στο τμήμα ΒΓ της τροχιά του σώματος , το επίπεδο είναι λείο οπότε η στατική τριβή από το δάπεδο μηδενίζεται, άρα

$\Sigma F'_x = F_1 - F_2 = 0$, άρα η μεταφορική κίνηση του σώματος θα είναι ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα τη τελική ταχύτητα που απέκτησε στο τμήμα ΑΒ της τροχιά του και η οποία είναι ίση με:

$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t_{AB}$ ή $\upsilon_{cm} = 1 \cdot 2$ ή $\upsilon_{cm} = 2\frac{m}{s}$

Το χρονικό διάστημα που απαιτείται ώστε το σώμα να διανύσει την απόσταση ΒΓ θα είναι $(ΒΓ) = \upsilon_{cm} \cdot t_{ΒΓ}$ ή $t_{(ΒΓ)} = \frac{(ΒΓ)}{\upsilon_{cm}}$ ή $t_{(ΒΓ)} = \frac{1,6}{2}$ ή

$t_{(ΒΓ)} = 0,8s$

Επίσης ισχύει: $\Sigma\tau'_{(o)} = I \cdot \alpha'_{γων}$ ή $2F_1 \cdot R_1 = I \cdot \alpha'_{γων}$ ή

$1,5 \cdot 0,2 = 0,02 \cdot \alpha'_{γων}$ ή $\alpha'_{γων} = 15\frac{rad}{s^2}$.

Συνεπώς η περιστροφική κίνηση του σώματος κατά την κίνηση του από το σημείο Β στο σημείο Γ θα είναι ομαλά επιταχυνόμενη στροφική, άρα για την γωνιακή μετατόπισή του θα ισχύει:

$\theta_{ΒΓ} = \omega \cdot t_{ΒΓ} + \frac{1}{2} \cdot \alpha'_{γων} \cdot t^2_{ΒΓ}$ ή $\theta_{ΒΓ} = 12,8\,rad$

Ο αντίστοιχος αριθμός των περιστροφών του σώματος είναι

$N_{ΒΓ} = \frac{\theta_{ΒΓ}}{2\pi}$ ή $N_{ΒΓ} = \frac{12,8}{2\pi} = \frac{6,4}{\pi}$ περιστροφές

Ο συνολικός αριθμός των περιστροφών του σώματος είναι

$N_{ΑΓ} = N_{ΑΒ} + N_{ΒΓ} = \frac{11,4}{\pi}$

γ) Για τον ρυθμό μεταβολής της περιστροφικής κινητικής ενέργειας του σώματος ισχύει: $\frac{dK_Π}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega = I \cdot \alpha_{γων} \cdot \omega$

Για το χρονικό διάστημα $0 \le t \prec 2s$

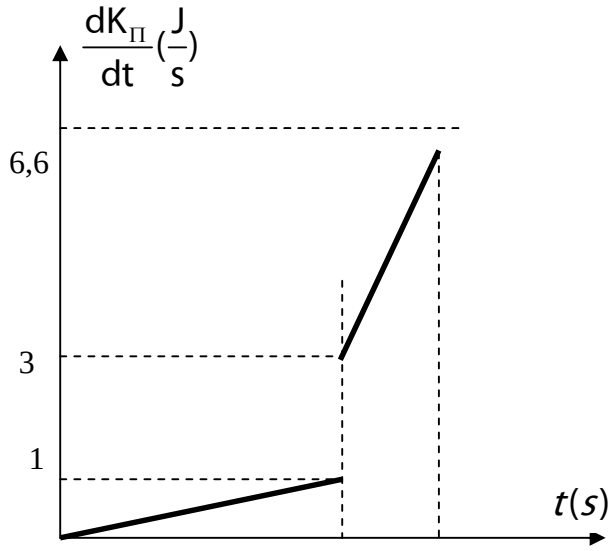
$\left(\frac{dK_Π}{dt}\right)_{ΑΒ} = I \cdot \alpha_{γων} \cdot \omega$ ή $\left(\frac{dK_Π}{dt}\right)_{ΑΒ} = I \cdot \alpha_{γων} \cdot \alpha_{γων} \cdot t$ ή $\left(\frac{dK_Π}{dt}\right)_{ΑΒ} = I \cdot \alpha_{γων}{}^2 \cdot t$ ή

$\left(\frac{dK_Π}{dt}\right)_{ΑΒ} = 0,02 \cdot 5^2 \cdot t$ ή $\left(\frac{dK_Π}{dt}\right)_{ΑΒ} = 0,02 \cdot 5^2 \cdot t$ ή $\left(\frac{dK_Π}{dt}\right)_{ΑΒ} = 0,5 \cdot t$ (S.I)

Για το χρονικό διάστημα από $2s \le t \prec 2,8s$

$\left(\frac{dK_Π}{dt}\right)_{ΒΓ} = I \cdot \alpha'_{γων} \cdot (\omega_B + \alpha'_{γων} \cdot (t - 2))$ ή

$\left(\frac{dK_Π}{dt}\right)_{ΒΓ} = 0,02 \cdot 15 \cdot (10 + 15 \cdot t - 30)$

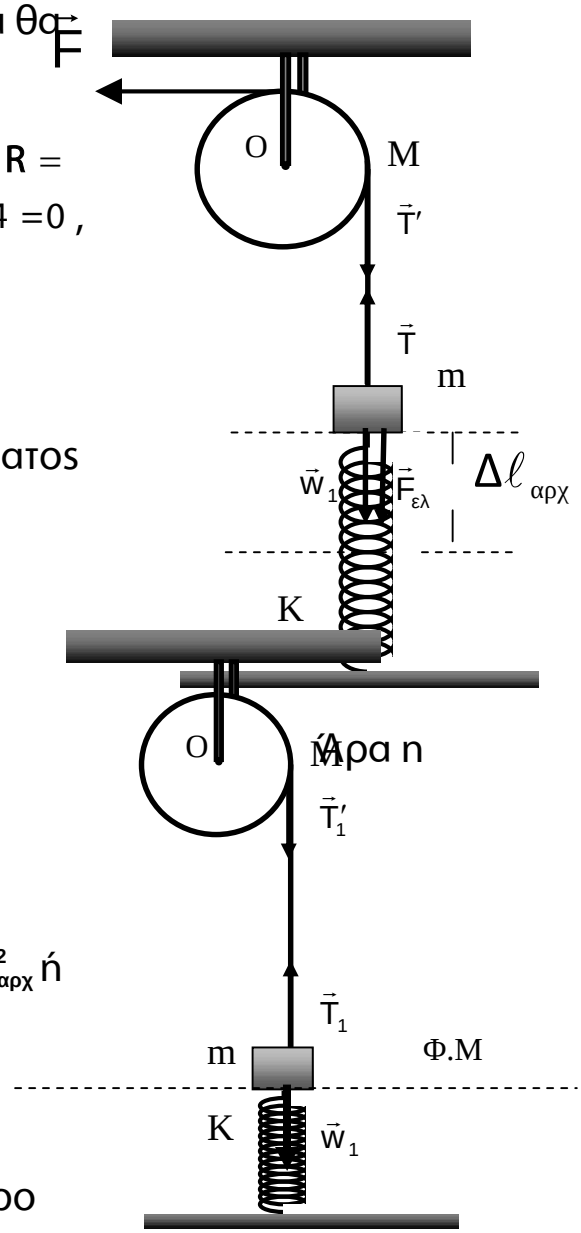


$$\left(\frac{dK_{\pi}}{dt}\right)_{\text{βγ}} = 0{,}3(10 + 15\cdot t - 30)$$ ή

$$\left(\frac{dK_{\pi}}{dt}\right)_{\text{βγ}} = 4{,}5\cdot t - 6\ (S.I)$$

Άρα προκύπτει διάγραμμα της μορφής

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2



α) Το νήμα είναι αβαρές μη εκτατό άρα θα ισχύει: T =T΄

Για το σύστημα ισχύει ότι:

$\Sigma^2_{(-)} = FR - w_1R - F_{\text{£}^a}R = FR - mgR - k\Delta\ell_{\sim\circ_i}R =$

$= 22\cdot 2 - 1\cdot 10\cdot 2 - 12\cdot 1\cdot 2 = 44 - 20 - 24 = 0$,

συνεπώς το σύστημα ισορροπεί.

β) Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας για το σύστημα.

$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{W_1} + W_{F_{\epsilon\lambda}} + W_{\tau_1} + W_{\tau_1'}$ (1)

Όμως για τα έργα των τάσεων του νήματος ισχύει: $W_{\tau_1} = -W_{\tau_1'}$ και

$$W_{F_{\epsilon\lambda}} = -\Delta U_{\epsilon\lambda} = -(\frac{1}{2}K\cdot\Delta\ell^2_{\tau\epsilon\lambda} - \frac{1}{2}\cdot K\cdot\Delta\ell^2_{\alpha\rho\chi})$$

όμως $a\ell_{2\text{£}^a}$ Ζ 0 ,άρα $W_{F_{\epsilon\lambda}} = \frac{1}{2}\cdot K\cdot\Delta\ell^2_{\alpha\rho\chi}$. Άρα η σχέση (1) γίνεται :

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = mg\Delta\ell_{\alpha\rho\chi} + \frac{1}{2}K\cdot\Delta\ell^2_{\alpha\rho\chi}$$ ή

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 = mg\Delta\ell_{\alpha\rho\chi} + \frac{1}{2}K\cdot\Delta\ell^2_{\alpha\rho\chi}$$ ή

$$\frac{1}{4}\cdot 2\cdot 4\omega^2 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4\cdot\omega^2 = 1\cdot 10\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 1^2$$

$$4\omega^2 = 16 \text{ ή } \omega^2 = 4 \text{ ή } \omega = 2\frac{rad}{s}.$$

Η ταχύτητα του σώματος Σ θα έχει μέτρο

$$\upsilon = \omega\cdot R = 4\frac{m}{s}$$

Η στροφορμή του συστήματος θα είναι $\vec{L}_{o\lambda} = \vec{L}_{\tau\rho} + \vec{L}_{\Sigma}$

ή $L_{ολ} = L_{τρ} + L_{Σ}$ ή $L_{ολ} = I \cdot ω + m \cdot υ \cdot R$ ή $L_{ολ} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 ω + m \cdot υ \cdot R$ ή

$L = 16 \frac{kg \cdot m^2}{s}$

γ) Για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ισχύει:

$\left(\frac{dL}{dt}\right)_{συστ} = Στ_{εξ}$ ή $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{συστ} = w_1 \cdot R$ ή $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{συστ} = m \cdot g \cdot R$ ή $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{συστ} = 1 \cdot 10 \cdot 2$

ή $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{συστ} = 20 \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$

δ)i) Για την περίοδο της ταλάντωσης το σώματος Σ ισχύει:

$T = 2π\sqrt{\frac{m}{K}}$ ή $T = 2π\sqrt{\frac{1}{12}}$ ή $T = π\frac{\sqrt{3}}{3} s$

Συνεπώς το Σ στο χρονικό διάστημα από $t_o = 0$ έως $t_1 = π\frac{\sqrt{3}}{3} s$ θα έχει εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση και θα έχει επιστρέψει στη θέση ισορροπίας του, όπου η ταχύτητά του είναι ίση με $υ = 4\frac{m}{s}$.

Άρα για το έργο της δύναμης του ελατηρίου θα ισχύει:

$W_{Fελ} = U_{αρχ} - U_{τελ} = 0$, ενώ για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ θα ισχύει :

$\frac{dK}{dt} = ΣF \cdot υ$ ή $\frac{dK}{dt} = m \cdot g \cdot υ$ ή $\frac{dK}{dt} = 1 \cdot 10 \cdot 4$ ή $\frac{dK}{dt} = 40 \frac{J}{s}$

ii) Μετά την κοπή του νήματος, η τροχαλία εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $ω = 2\frac{rad}{s}$, εφόσον το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δέχεται είναι ίσο με μηδέν.

Άρα θα ισχύει: $θ = ω \cdot Δt$ ή $20 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot Δt$ ή $Δt = 10π\sqrt{3}$ s

Σ΄ αυτό το χρονικό διάστημα το σώμα θα έχει εκτελέσει Ν ταλαντώσεις ίσες με $N = f \cdot Δt$ ή $N = \frac{Δt}{T}$ ή $N = \frac{10π\sqrt{3}}{\frac{π\sqrt{3}}{3}}$ ή N= 30 ταλαντώσεις.

Από το Φυσικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν :
Γ. Μαραγκάκης , Ζ. Μαυρομανωλάκης,
Ν. Μπρίγγος, Α. Τσιπράς