# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ.194

**Α2.** Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ.188

**Α3.** Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ.259

**Α4. α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $|z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow$

$(z-4)(\overline{z}-4) = 4(z-1)(\overline{z}-1) \Leftrightarrow$

$z\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 16 = 4(z\overline{z} - z - \overline{z} + 1) \Leftrightarrow$

$z\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 16 = 4z\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 4 \Leftrightarrow$

$3z\overline{z} = 12 \Leftrightarrow z\overline{z} = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$ άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2

**Β2.α)** Είναι $|z| = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow z\overline{z} = 4 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{4}{z}$. Τότε

$$\overline{w} = \frac{2\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \frac{2\overline{z_2}}{\overline{z_1}} = \frac{\frac{8}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + \frac{\frac{8}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} = \frac{8z_2}{4z_1} + \frac{8z_1}{4z_2} = \frac{2z_2}{z_1} + \frac{2z_1}{z_2} = w,$$

άρα ο w είναι πραγματικός.

**β)** $|w| = \left|\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right| \le 2\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + 2\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = 2\cdot\frac{2}{2} + 2\cdot\frac{2}{2} = 4$ άρα

$|w| \le 4 \overset{w\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} -4 \le w \le 4$

**Β3.** $w = -4 \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = -4 \Leftrightarrow 2{z_1}^2 + 2{z_2}^2 = -4z_1z_2 \Leftrightarrow$

${z_1}^2 + 2z_1z_2 + {z_2}^2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$

οπότε οι εικόνες των $z_1, z_2$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου του ερωτήματος Β1. Δίνεται ακόμα $z_3 = 2iz_1 = -2iz_2$ επομένως $|z_3 - z_1| = |2iz_1 - z_1| = |z_1||2i-1| = 2\sqrt{5}$ και

$|z_3 - z_2| = |-2iz_2 - z_2| = |z_2||2i+1| = 2\sqrt{5}$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Η f(x) είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεωνμε $f'(x)=\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)'=\ldots=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}\geq 0$ με την ισότητα μόνο για x=1, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Σύνολο τιμών: $f((-\infty,+\infty))=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(0,+\infty)$, διότι

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}e^x\cdot\frac{1}{x^2+1}=0\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

**Γ2.**

$$f(e^{3-x}(x^2+1))=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow f(e^{3-x}(x^2+1))=f(2)\overset{"1-1"}{\Leftrightarrow}e^{3-x}(x^2+1)=2\Leftrightarrow$$

$e^{3-x}(x^2+1)=2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{e^x}=\frac{2}{e^3}\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{e^3}$ και επειδή το $\frac{2}{e^3}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση.

**Γ3.** Ορίζουμε $h(u)=\int_1^u f(t)dt$. Ηh συνεχής στο [2x, 4x], παραγωγίσιμη στο (2x,4x) άρα από Θ. Μ. Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi\in(2x,4x)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=\frac{h(4x)-h(2x)}{4x-2x}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{2x}$

Είναι $\xi<4x\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(\xi)<f(4x)\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x}f(t)dt<2xf(4x)$

**Γ4.** Η g συνεχής στο 0 αφού $\lim\limits_{x\to0}g(x)\overset{DLH}{=}\ldots=2f(0)=2$

Για x>0 η g(x) είναι παραγωγίσιμη αφού η f συνεχήςάρα

$$g'(x)=\left(\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x}\right)' = \left(\frac{h(4x)-h(2x)}{x}\right)' = \frac{[4\cdot f(4x)-2\cdot f(2x)]\cdot x-\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2}$$

Από Γ3 έχουμε: $4f(4x)-2f(2x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt > 2x[f(4x)-f(2x)]$,

επομένως: $g'(x)>\frac{2x[f(4x)-f(2x)]}{x^2} \Leftrightarrow g'(x)>\frac{2[f(4x)-f(2x)]}{x}$ και

$x>0 \Leftrightarrow 4x>2x \overset{\uparrow}{\Leftrightarrow} f(4x)>f(2x)$

Συνεπώς $g'(x)>0$ άρα γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**

$f'(x)e^{f(x)}+f'(x)e^{-f(x)}=2 \Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=(2x)' \Leftrightarrow e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$

για x=0 , c=0 άρα

$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x \Leftrightarrow e^{2f(x)}-1=2xe^{f(x)} \Leftrightarrow$

$e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}+x^2=1+x^2 \Leftrightarrow$

$(e^{f(x)}-x)^2=1+x^2 \,(1)$

- Η $e^{f(x)}-x$ είναι συνεχής ως διαφορά και σύνθεση

- Έστω ότι υπάρχει $x_0$ ώστε $e^{f(x_0)}-x_0=0$ άτοπο αφού τότε $1+{x_0}^2=0$

συνεπώς η $e^{f(x)}-x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο και για x=0 προκύπτει $e^{f(x)}-x>0$

Τότε απο (1) $e^{f(x)}=x+\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

**Δ2.** Είναι $f'(x)=\ldots=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Η $f'$ παραγωγίσιμη ως πηλίκο και σύνθεση στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=...=-\frac{2x}{1+x^2}$$

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $f''$ | $+$ | 0 | $-$ |
| f | $\cup$ | | $\cap$ |

Σημείο καμπής το $A(0,f(0))$

δηλαδή $A(0,0)$

Η εφαπτομένη της f στο 0 είναι
$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x$

από κυρτότητα και εφαπτομένη στο [0,1] έχουμε: $f(x)\leq x$

$$E=\int_0^1\left|f(x)-x\right|dx=-\int_0^1(f(x)-x)dx=-\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 xdx=$$

$$-\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-\frac{1}{2}\text{τ.μ.γιατί }\int_0^1 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x'f(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=$$

$$f(1)-\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1=...=\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1$$

**Δ3.** Έχουμε: $K=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln\left|f(x)\right|\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\dfrac{1}{\ln\left|f(x)\right|}}$

Είναι $\frac{0}{0}$ και επειδή $x>0$, η $f>0$ και από DLH έχουμε:

$$K=\lim_{x\to0^+}\left[-e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)\ln^2 f(x)\sqrt{x^2+1}\right]=0\text{, αφού}$$

$$\lim_{x\to0^+}\left[f(x)\ln f(x)\right]=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{f(x)}}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{f(x)}}{-\frac{1}{f^2(x)}}=\lim_{x\to0^+}\left[-f(x)\right]=$$

**Δ4.** Θεωρούμε την

$$h(x)=(x-2)\left[1-3\int_0^{x-2}f(t^2)dt\right]+(x-3)\left[8-3\int_0^{x}f^2(t)dt\right]$$

- Η h είναι συνεχής ως σύνθεση/πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο [2,3]
- $h(2)=-\left[8-3\int_0^2 f^2(t)dt\right]$. Λόγω κυρτότητας και της εφαπτομένης

y=x έχουμε

$$f(x)\le x \overset{f>0}{\Leftrightarrow} f^2(x)\le x^2 \overset{\exists x\in[0,2]\,\tau.\omega.\, f^2(x)<x^2}{\Rightarrow} \int_0^2 f^2(x)dx<\int_0^2 x^2dx \Leftrightarrow .. \Leftrightarrow h(2)<0$$

- $h(3)=1-3\int_0^1 f(t^2)dt$. Ομοίως

$$f(t)\le t \Leftrightarrow f(t^2)\le t^2 \overset{\exists t\in[0,1]\,\tau.\omega.\, f(t^2)<t^2}{\Rightarrow} \int_0^1 f(t^2)dt<\int_0^1 t^2dt \Leftrightarrow .. \Leftrightarrow h(3)>0$$

άρα από Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_0\in(2,3)$ τ.ω. $h(x_0)=0$ που δίνει το ζητούμενο.

**Σχόλιο:** Στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης δυο υποερωτήματα του θέματος Δ παρουσίαζαν δυσκολία (αξίας 18 μονάδων). Ήταν εξίσου απαιτητικό το ερώτημα Γ3 . Τα τρία πρώτα θέματα όμως χαρακτηρίζονται κλασσικά και αναμενόμενα χωρίς παγίδες και χωρίς «περίεργες διατυπώσεις».

**Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργαστήκαν: Γ.Ανδρουλιδάκης, Μ.Βυνιχάκης, Α.Δουλγεράκης, Η.Μαργαρίτη, Μ.Μπαρμπούνη, Ζ. Μπομπότη, Π.Σιδερής Α.Τσιλιφώνης.**