Απαντήσεις

Θέμα 1ο

α) $f'(x)=f(x)+e^x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f'(x)-f(x)=e^x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$f'(x)e^{-x}+(e^{-x})'f(x)=\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \left(f(x)e^{-x}\right)'=(\eta\mu x)' \Leftrightarrow$

Επομένως $f(x)e^{-x}=\eta\mu x+c, c\in\mathbb{R}$.

Για $x=\frac{\pi}{2}$, έχουμε

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{2}}=\eta\mu\frac{\pi}{2}+c \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}}=\eta\mu\frac{\pi}{2}+c \Leftrightarrow 1=1+c \Leftrightarrow c=0$$

άρα $f(x)e^{-x}=\eta\mu x \Leftrightarrow f(x)=e^x\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$.

βi) Η f είναι παραγωγίσιμη στο [ο, π] ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με :

$f'(x)=e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x),\ x\in[0,\pi]$.

Η f′ είναι παραγωγίσιμη στο [0, π] ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με :

$f''(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)+e^x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)=2e^x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in[0,\pi]$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$ για $x\in[0,\pi]$.

Επίσης για $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\sigma\upsilon\nu x>0$ άρα $f''(x)>0$

και για $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$, $\sigma\upsilon\nu x<0$ άρα $f''(x)<0$

άρα όπως φαίνεται κι από τον πίνακα η f είναι κυρτή στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και κοίλη στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ με τη C_f να έχει σημείο καμπής το $A\left(\frac{\pi}{2},f(\frac{\pi}{2})\right)$.

x	ο		π/2		+∞
f″		+	ο	−	
f		∪		∩	

βii) Για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι f′′(x)>0, άρα η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, επομένως για κάθε

$0<x<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f'(0)<f'(x)<f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ άρα $f'(x)>0$.

Για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ είναι f''(x)<0, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση f '(x)=0 έχει προφανή ρίζα τον αριθμό $x=\frac{3\pi}{4}$ επομένως για κάθε

$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)>f'(x)>f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{2}}>f'(x)>0$

και για κάθε

$\frac{3\pi}{4}<x<\pi \Leftrightarrow f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)>f'(x)>f'(\pi) \Leftrightarrow 0>f'(x)>-e^{\pi}$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ με ολικό μέγιστο για χ=$3\pi/4$ το $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$, και ολικό ελάχιστο για χ=0 και χ=π το 0.

x	o	$3\pi/4$	π
f'	+	0	−
f	↗		↘

γi) Η g είναι παραγωγίσιμη στο [0, π] με
$g'(x)=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x$, άρα $g'(0)=1=f'(0)$.

Επίσης f(0)=0=g(0), επομένως οι C_f, C_g έχουν στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0=0$, κοινή εφαπτομένη την
$(\varepsilon)\ : y-0=1(x-0) \Leftrightarrow y=x$.

γii) Επειδή η f′(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, η C_f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, επομένως $f(x)\geq x$ (1) για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για χ=0.

Η g′ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με :

$$g''(x)=-\eta\mu x-(\eta\mu\chi+x\sigma\upsilon\nu x)=-2\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x<0,\ \text{για}\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

άρα η C_g στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, επομένως $g(x)\leq x$ (2) για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για χ=0.

Από τις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι $f(x)\geq g(x),\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

δ) Επειδή $f'(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)>0,\ x\in(0,\pi)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ άρα και ''1-1'', επομένως ορίζεται η f^{-1} .

Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με σύνολο τιμών το

$f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[f(0),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\left[0,e^{\frac{\pi}{2}}\right]$, άρα το πεδίο ορισμού της

f^{-1} είναι το $\left[0,e^{\frac{\pi}{2}}\right]$.

Θέμα 2ο

α) Για χ=ο έχουμε $f(g(0))g(0)=0 \Leftrightarrow f(1)=0$.

Επίσης

$$f'(g(x))g'(x)=\frac{1-x}{e^x} \Leftrightarrow \left[f(g(x))\right]'=\left(\frac{x}{e^x}\right)' \Leftrightarrow f(g(x))=\frac{x}{e^x}+c$$

οπότε για χ=ο έχουμε :

$f(g(0))=c \Leftrightarrow f(1)=c \Leftrightarrow c=0$, άρα $f(g(x))=\frac{x}{e^x}$.

Όμως $f(g(x))g(x)=x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x}g(x)=x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} g(x)=e^x$, επομένως

$g'(x)=g(x)=e^x$, άρα $g'(1)=g(1)=e$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο A(1,g(1)) είναι η

$$y-g(1)=g'(1)(x-1) \overset{g'(1)=g(1)}{\Leftrightarrow} y-g(1)=g(1)(x-1) \Leftrightarrow y=g(1)x.$$

β) Έχουμε ότι $f(e^x)=\frac{x}{e^x}$ και θέτουμε $e^x=u>0$ οπότε

$e^x=u \Leftrightarrow x=\ln u$ επομένως,

$$f(e^x)=\frac{x}{e^x} \Rightarrow f(u)=\frac{\ln u}{u},\ u>0 \text{ άρα } f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

που επαληθεύει τις αρχικές σχέσεις.

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\ x>0$ και $f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3},\ x>0$ άρα

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x-3}{x^3}=0 \Leftrightarrow \ln x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}=\sqrt{e^3}=e\sqrt{e} \text{ και}$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x-3}{x^3}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x>\frac{3}{2} \Leftrightarrow x>e\sqrt{e}$$

Σύμφωνα με τον διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f είναι κοίλη στο $\left(0,e\sqrt{e}\right]$ και κυρτή στο $\left[e\sqrt{e},+\infty\right)$. Επίσης για τη

x	o	$e\sqrt{e}$	$+\infty$
f″	−	o	+
f	∩		∪

$g(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$, έχουμε $g'(x)=e^x,\ g''(x)=e^x>0$

άρα η g κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) $f(x)=\frac{\ln x}{x},\ f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\ x>0$ άρα $f(1)=0,\ f'(x)=1$

οπότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη x=1 είναι
$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = x - 1.$

δ) Για κάθε χ>ο δείχνουμε πως f(x)<g(x). Συγκεκριμένα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,0)$ είναι η $y = x - 1$ ενώ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $B(0,1)$ είναι η $y = x + 1$, από την κυρτότητα των f, g έχουμε ότι $f(x) \le x - 1 < x < x + 1 \le g(x)$ οπότε το ζητούμενο εμβαδόν θα ισούται με :

$$E = \int_1^{\ln 3} |f(x) - g(x)| dx = \int_1^{\ln 3} [g(x) - f(x)] dx = \int_1^{\ln 3} (e^x - \frac{\ln x}{x}) dx =$$

$$\int_1^{\ln 3} e^x dx - \int_1^{\ln 3} \frac{\ln x}{x} dx = \left[e^x\right]_1^{\ln 3} - \frac{1}{2}\left[\ln^2 x\right]_1^{\ln 3} = 3 - e - \frac{1}{2}\ln^2(\ln 3) =$$

$$\Leftrightarrow E = \left(3 - e - \frac{1}{2}\ln^2(\ln 3)\right) \text{ τ. μ}$$

ε) Έχουμε $E > 0 \Leftrightarrow 3 - e - \frac{1}{2}\ln^2(\ln 3) > 0$

$$\Leftrightarrow 6 - 2e > \ln^2(\ln 3) \Leftrightarrow \sqrt{6 - 2e} > \ln(\ln 3) \Leftrightarrow e^{\sqrt{6-2e}} > \ln 3.$$

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν:
Γ.Ανδρουλιδάκης, Μ.Βυνιχάκης, Α.Δουλγεράκης, Η.Μαργαρίτη, Μ.Μπαρμπούνη, Ζ.Μπομπότη, Π.Σιδερής, Α.Τσιλιφώνης