Απαντήσεις

Θέμα 1ο

α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=\left(\frac{2x+1}{e^{2x}}\right)'=\frac{(2x+1)'\cdot e^{2x}-(2x+1)(e^{2x})'}{(e^{2x})^2}=\frac{2e^{2x}-(2x+1)e^{2x}\cdot 2}{(e^{2x})^2}=$$

$$\frac{-4x\cdot e^{2x}}{(e^{2x})^2}=\frac{-4x}{e^{2x}},\ x\in\mathbb{R}$$

Η f′ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f''(x)=\left(\frac{-4x}{e^{2x}}\right)'=\frac{(-4x)'\cdot e^{2x}+(4x)(e^{2x})'}{(e^{2x})^2}=\frac{-4e^{2x}+8x\cdot e^{2x}}{(e^{2x})^2}=$$

$$\frac{(-4+8x)e^{2x}}{(e^{2x})^2}=\frac{8x-4}{e^{2x}},\ x\in\mathbb{R}$$

Είναι $f''(x)+4f'(x)+4f(x)=\frac{8x-4}{e^{2x}}+4\left(\frac{-4x}{e^{2x}}\right)+4\left(\frac{2x+1}{e^{2x}}\right)=$

$\frac{8x-4-16x+8x+4}{e^{2x}}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-4x}{e^{2x}}=0\Leftrightarrow -4x=0\Leftrightarrow x=0$

$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{-4x}{e^{2x}}>0\Leftrightarrow x<0$

$f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{-4x}{e^{2x}}<0\Leftrightarrow x>0$

x	-∞	o	+∞
f'(χ)	+	0	−
f(χ)	↗		↘

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Παρουσιάζει στο $x_0=0$ μέγιστο το $f(0)=1$

Για κάθε $x<0$ λόγω μονοτονίας ισχύει $f(x)<f(0)$

Για κάθε $x\geq 0$ λόγω μονοτονίας ισχύει $f(x)\leq f(0)$

Συνεπώς για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$f(x)\leq f(0)\Leftrightarrow\frac{2x+1}{e^{2x}}\leq 1\Leftrightarrow 2x+1\leq e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι η $f'(x)$ άρα πρέπει να μελετήσουμε την $f''(x)$ ως προς το πρόσημο και την $f'(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Είναι:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{8x-4}{e^{2x}}=0 \Leftrightarrow 8x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$$

x	-∞	½	+∞
f''(χ)	-	0	+
f'(χ)	↘		↗

Ο ρυθμός μεταβολής της f,δηλαδή η $f'(x)$ στο $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ είναι γνησίως φθίνουσα και στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ είναι γνησίως αύξουσα εφόσον $f''(x)\leq 0$ και $f''(x)\geq 0$ στα αντίστοιχα διαστήματα. Άρα στο $x_0=\frac{1}{2}$ η $f'(x)$παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή της δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της στο $x_0=\frac{1}{2}$ γίνεται ελάχιστος και η ελάχιστη αυτή τιμή του είναι: $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-4\cdot\frac{1}{2}}{e^{2\cdot\frac{1}{2}}}=\frac{-2}{e}$

Θέμα $2^{ο}$

α) Έστω α το αριστερό όριο της πρώτης κλάσης και c το πλάτος των κλάσεων. Η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι 14 επομένως έχουμε: $\frac{(\alpha+3c)+(\alpha+4c)}{2}=14 \Leftrightarrow 2\alpha+7c=28$ (1).

Η διάμεσος του δείγματος είναι δ=9 και χωρίζει το δείγμα στη μέση. Ισχύει: $F_3=F_2+f_3 \Leftrightarrow f_3=0,4$, επομένως για να φτάσουμε στο 50% , δεδομένου ότι οι τιμές της μεταβλητής έχουν κατανεμηθεί ομοιόμορφα στις κλάσεις, ισχύει:

$F_2+\frac{f_3}{4}=0,50$ επομένως:

$\delta=\alpha+2c+\frac{c}{4} \Leftrightarrow 4\delta=4\alpha+8c+c \Leftrightarrow 4\alpha+9c=36$ (2).

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) έχουμε α=0 και c=4.

Ισχύει: $F_2 = \frac{N_2}{v} \Leftrightarrow v = \frac{N_2}{F_2} = \frac{32}{0,4} = 80.$

Επίσης: $F_3 = F_2 + f_3 \Leftrightarrow f_3 = F_3 - F_2 = 0,8 - 0,4 = 0,4$

Η διάμεσος του δείγματος είναι 9, συνεπώς πάνω από το δ=9 βρίσκεται το 50% του δείγματος άρα:

$\frac{3f_3}{4} + f_4 + f_5 = 0,5 \Leftrightarrow f_4 + f_5 = 0,2$

Επειδή η πιθανότητα να έχει γράψει ένας μαθητής τουλάχιστον 18 είναι 2,5% ισχύει:

$\frac{f_5}{2} = 0,025 \Leftrightarrow f_5 = 0,05, f_4 = 0,20 - 0,05 = 0,15.$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο: $f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = v \cdot f_i$ έχουμε:

$v_3 = v \cdot f_3 = 80 \cdot 0,4 = 32, v_4 = v \cdot f_4 = 80 \cdot 0,15 = 12,$
$v_5 = v \cdot f_5 = 80 \cdot 0,05 = 4$

Επίσης: $N_3 = N_2 + v_3 = 32 + 32 = 64$, $N_4 = N_3 + v_4 = 64 + 12 = 76,$

ενώ γνωρίζουμε ότι : $N_5 = v = 80$ καθώς και $F_5 = \sum_{i=1}^{5} f_i = 1.$

Επειδή οι μαθητές που έγραψαν κάτω από 4 είναι το ένα τρίτο από αυτούς που έγραψαν τουλάχιστον 4 και το πολύ 8 ισχύει:

$f_1 = \frac{f_2}{3} \Leftrightarrow f_2 = 3 \cdot f_1$ καθώς και $f_1 + f_2 = F_2 = 0,4$, έχουμε: $F_1 = f_1 = 0,1$

και $f_2 = 0,3$, $F_4 = 0,80 + 0,15 = 0,95$, $v_1 = v \cdot f_1 = 80 \cdot 0,1 = 8$,
$v_2 = v \cdot f_2 = 80 \cdot 0,3 = 24, N_1 = v_1 = 8.$

Ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

$[\alpha - \beta)$	x_i	v_i	N_i	f_i	F_i
[0,4)	2	8	8	0,10	0,10
[4,8)	6	24	32	0,30	0,40
[8,12)	10	32	64	0,40	0,80
[12,16)	14	12	76	0,15	0,95
[16,20)	18	4	80	0,05	1
Αθροίσματα		80		1	

β) Για τη μέση τιμή θα χρησιμοποιηθεί ο τύπος:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot v_i}{v}=\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot f_i$$

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$(\bar{x}-x_i)^2$	$(\bar{x}-x_i)^2 \cdot f_i$
2	0,10	0,2	49	4,9
6	0,30	1,8	9	2,7
10	0,40	4,0	1	0,4
14	0,15	2,1	25	3,75
18	0,05	0,9	81	4,05
Αθροίσματα	1	9		15,8

Επομένως: $\bar{x}=9$, ακέραιος αριθμός , η διακύμανση δίνεται από

τον τύπο: $s^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}(\bar{x}-x_i)^2 \cdot v_i}{v}=\sum_{i=1}^{5}(\bar{x}-x_i)^2 \cdot f_i=15{,}8$ και η τυπική

απόκλιση είναι: $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{15{,}8}\simeq 3{,}975$.

γ) Για τα ζητούμενα ενδεχόμενα ισχύει: $P(A)=F_3=0{,}8$ καθώς και $P(B)=f_3+f_4=0{,}4+0{,}15=0{,}55$, ενώ τα κοινά στοιχεία των δύο ενδεχομένων είναι οι μαθητές των οποίων οι βαθμοί είναι

τουλάχιστον οκτώ αλλά λιγότερο από δώδεκα, δηλαδή ανήκουν στην κλάση [8,12) με πιθανότητα: $P(A\cap B)=f_3=0{,}4$.

Έχουμε λοιπόν:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}8+0{,}55-0{,}40=0{,}95$

$P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=1-P(A)-P[(A\cup B)']=$

$=1-P(A)-[1-P(A\cup B)]=P(A\cup B)-P(A)=0{,}95-0.80=0{,}15$

Καθώς το ενδεχόμενο $(A'\cap B')$ διαβάζεται ως κανένα από τα A,B και είναι ίσο με το ενδεχόμενο $(A\cup B)'$.

$P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)=1-P(A)+P(B)-P(B-A)=$

$=1-P(A)+P(B)-[P(B)-P(B\cap A)]=1-P(A)+P(B\cap A)]=$

$=1-0{,}8+0{,}4=0{,}6$

δ) i) Ισχύει: $v(t)=x'(t)=(t^3+\alpha t^2+\beta t)'=3t^2+2\alpha t+\beta$. Είναι: $t_1=5\cdot P(A\cap B)=5\cdot 0{,}4=2s$, $t_2=10\cdot P(A)=10\cdot 0{,}8=8s$. Το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο άρα $v(2)=0$, $v(8)=0$.

$v(2)=0\Leftrightarrow 3\cdot 2^2+2\alpha\cdot 2+\beta=0\Leftrightarrow 12+4\alpha+\beta=0$ (1)

$v(8)=0 \Leftrightarrow 3\cdot 8^2+2\alpha\cdot 8+\beta=0 \Leftrightarrow 192+16\alpha+\beta=0$ (2).

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε: $180+12\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=-15$.

Άρα: $12+4\cdot(-15)+\beta=0 \Leftrightarrow 12-60+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=48$.

Επομένως:

$x(t)=t^3-15t^2+48t$ και $v(t)=(t^3-15t^2+48t)'=3t^2-30t+48$

ii) Η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας επομένως: $\alpha(t)=(v(t))'=(3t^2-30t+48)'=6t-30$

Για $t=2s$ $\alpha(2)=6\cdot 2-30=12-30=-18\frac{m}{s^2}$

Για $t=8s$ $\alpha(8)=6\cdot 8-30=48-30=18\frac{m}{s^2}$

iii) Το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση όταν $v(t)>0$ δηλαδή $3t^2-30t+48>0 \Leftrightarrow t^2-10t+16>0 \Leftrightarrow (t-2)(t-8)>0$ $\Leftrightarrow t<2s$ ή $t>8s$, ενώ κινείται στην αρνητική φορά για $2<t<8s$.

iv) Το συνολικό διάστημα που διανύθηκε από το κινούμενο σημείο είναι: $S=S_1+S_2+S_3=204m$ όπου

$S_1=|x(2)-x(0)|=48m$ $S_2=|x(8)-x(2)|=|-64-48|=112m$

$S_3=|x(10)-x(8)|=|-20-(-64)|=44m$ καθώς:

$x(0)=0^3-15\cdot 0^2+48\cdot 0=0m$

$x(2)=2^3-15\cdot 2^2+48\cdot 2=48m$

$x(8)=8^3-15\cdot 8^2+48\cdot 8=-64m$

$x(10)=10^3-15\cdot 10^2+48\cdot 10=-20m$

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργαστήκαν: Γ.Ανδρουλιδάκης, Μ.Βυνιχάκης, Α.Δουλγεράκης, Η.Μαργαρίτη, Μ.Μπαρμπούνη, Α.Τσιλιφώνης, Π.Σιδερής.