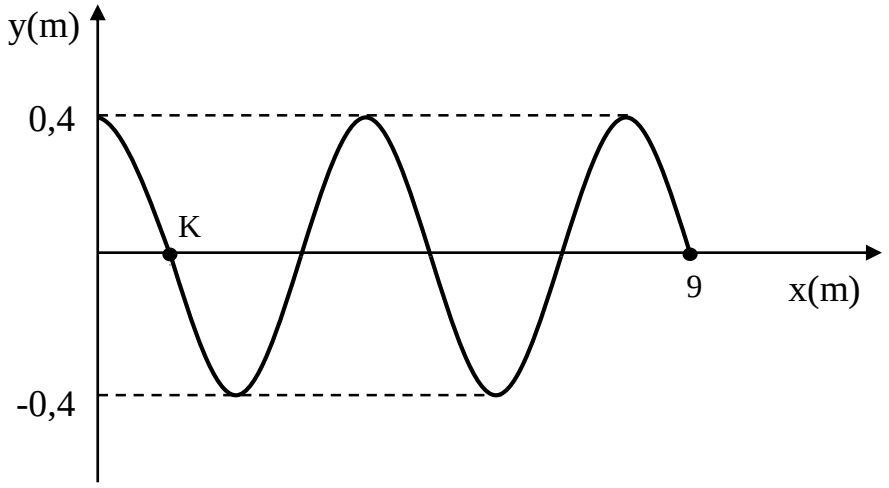
ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ1

Σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον θετικό ημιάξονα Ox, διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα με ταχύτητα $\upsilon = 4m/s$. Η πηγή του κύματος βρίσκεται στη θέση x = 0 του ημιάξονα και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση. Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1.



α. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

β. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_1 που αντιστοιχεί στο στιγμιότυπο του κύματος.

γ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα της ταλάντωσης του σημείου Κ, που φαίνεται στο στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή t_1.

δ. Να υπολογίσετε τον αριθμό των ταλαντώσεων που έχει εκτελέσει το σημείο Κ από τη χρονική στιγμή t = 0 έως τη χρονική στιγμή t_1.

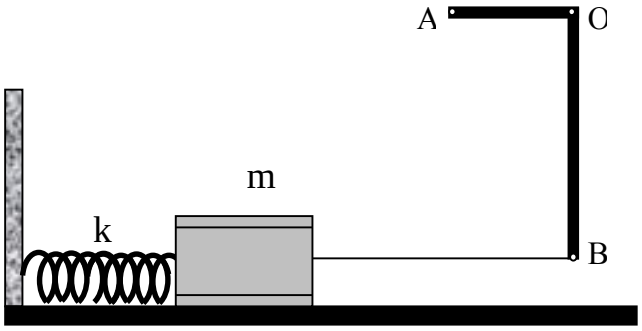
Έστω ότι το παραπάνω σχήμα απεικονίζει το στιγμιότυπο ενός στάσιμου κύματος που έχει δημιουργηθεί στο ίδιο ελαστικό μέσο, κάποια χρονική στιγμή κατά την οποία η κινητική ενέργεια κάθε ταλαντούμενου σημείου του ελαστικού μέσου είναι τριπλάσια από τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του. Στο στάσιμο κύμα που έχει δημιουργηθεί, στην αρχή Ο (x = 0) εμφανίζεται κοιλία και τη χρονική στιγμή t = 0 το σημείο που βρίσκεται στη θέση αυτή διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο κατά τη θετική φορά.

ε. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δύο λεπτές, ισοπαχείς και ομογενείς ράβδοι ΟΑ και ΟΒ από διαφορετικά υλικά συγκολλούνται στο ένα άκρο τους Ο, ώστε να σχηματίσουν ορθή γωνία. Η ράβδος ΟΒ έχει μήκος L_1 = 0.8 m και μάζα m_1 = 0.4 kg και η ράβδος ΟΑ έχει μήκος L_2 = 0.4 m και μάζα m_2. Το σύστημα των δυο ράβδων, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδό τους που διέρχεται από την κορυφή Ο της ορθής γωνίας. Αβαρές και μη εκτατό, οριζόντιο και τεντωμένο νήμα συνδέει το άκρο Β της ράβδου ΟΒ άλλο σώμα μάζας m_3 = 0,2 kg, το οποίο μπορεί να ολισθαίνει πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k =20N/m. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόντα στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί με το ελατήριο επιμηκυμένο και την ράβδο ΟΒ κατακόρυφη όπως φαίνεται στο σχήμα.

Την χρονική στιγμή t_o = 0 κόβεται το νήμα και το σύστημα των δυο ράβδων περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από το Ο μέχρι η ράβδος ΟΒ να γίνει οριζόντια.



Να υπολογίσετε:

α. την μάζα της ράβδου ΟΑ

β. τη ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ράβδων ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό τους.

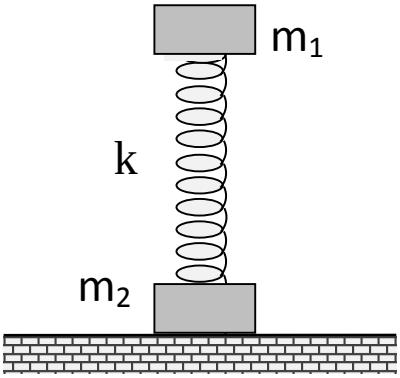
γ. τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος των δυο ράβδων, την χρονική στιγμή t_o = 0.

δ. το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος m_3 κατά την χρονική στιγμή t =T/8 .

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας λεπτής ομογενούς ράβδου μάζας m και μήκους L ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι I_{cm} = $mL^2/12$ και το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι g = 10 m/s^2.

ΕΡΩΤΗΣΗ ΚΡΙΣΕΩΣ

Τα σώματα με μάζας m_1 και m_2 του σχήματος ηρεμούν δεμένα στα άκρα κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το μέγιστο πλάτος που μπορεί να έχει η ταλάντωση του σώμα μάζας m_1 , ώστε το σώμα μάζας m_2 να μην χάνει επαφή με το δάπεδο είναι:



α) $\frac{(m_1+m_2)g}{k}$ β) $\frac{m_2 g}{k}$ γ) $\frac{(m_1+2m_2)g}{k}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

α. Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτουν: A = 0,4m και $\frac{9\lambda}{4} = 9m$ ή λ = 4m. Από τη θεμελιώδη κυματική εξίσωση έχουμε: $\upsilon = \lambda f$ ή $\upsilon = \frac{\lambda}{T}$ ή $T = \frac{\lambda}{\upsilon}$ ή $T = 1s$.

Η εξίσωση που περιγράφει το κύμα είναι της μορφής:

$y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ ή $y = 0{,}4\eta\mu 2\pi(t - 0{,}25x)$ (S.I.).

β. Από το στιγμιότυπο φαίνεται ακόμα ότι τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση x = 9m. Επειδή η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι σταθερή ισχύει: $\upsilon = \frac{x}{t_1}$ ή $t_1 = \frac{x}{\upsilon}$ ή $t_1 = 2{,}25s$.

γ. Η θέση του σημείου Κ στον άξονα Ox είναι $x_K = +\frac{\lambda}{4} = 1m$.

Η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $\upsilon_K = \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda})$ ή $\upsilon_K = \frac{2\pi}{T}A\sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda})$ ή $\upsilon_K = 0{,}8\pi\frac{m}{s}$.

δ. Έστω t_K η χρονική στιγμή που ξεκινά να ταλαντώνεται το σημείο Κ. Ισχύει: $t_K = \frac{x_K}{\upsilon}$ ή $t_K = 0{,}25s$.

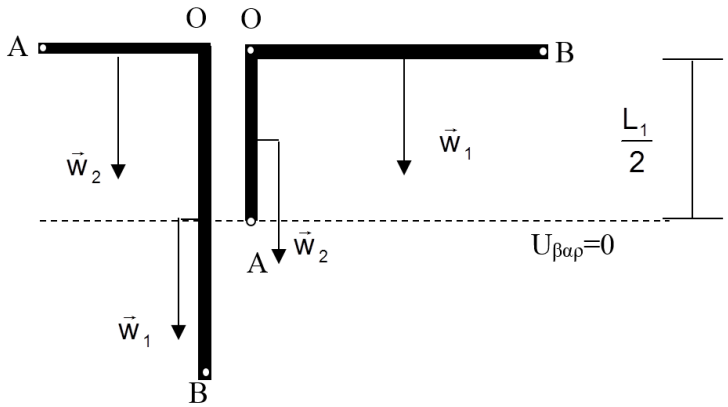
Ο αριθμός Ν των ταλαντώσεων που εκτελεί το σημείο Κ από τη χρονική στιγμή t = 0 έως τη χρονική στιγμή t_1 = 2,25s

υπολογίζεται από τη σχέση: $N = f\Delta t$ ή $N = f(t_1 - t_K)$ ή $N = \frac{1}{T}(t_1 - t_K)$ ή $N = 2$ ταλαντώσεις.

ε. Από το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος προκύπτουν: λ = 4m και y_o = +0,4m. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση που εκτελεί το σημείο Ο(x = 0) έχουμε: $E = K + U$ ή $E = 4U$ ή $\frac{1}{2}DA'^2_0 = 4\frac{1}{2}Dy_O^2$ ή $|A'_0| = 2|y_O|$ ή $|A'_0| = 0{,}8m$ ή $2A = 0{,}8m$ ή $A = 0{,}4m$.

Επειδή το στάσιμο κύμα έχει δημιουργηθεί στο ίδιο ελαστικό μέσο, η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων που συμβάλλουν για να το δημιουργήσουν είναι $\upsilon = 4m/s$, επομένως η περίοδος τους είναι T = 1s. Συνεπώς η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι: $y = 2A\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi x}{\lambda})\eta\mu(\frac{2\pi}{T}t)$ ή $y = 0{,}8\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi x}{2})\eta\mu(2\pi t)$ (S.I).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ2

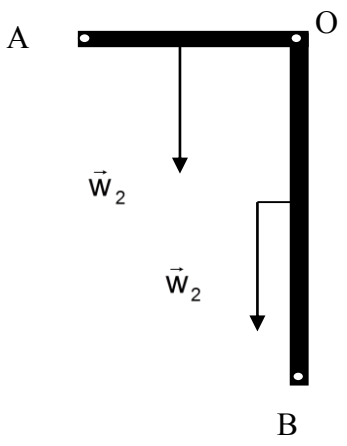


Κατά την κίνηση του συστήματος των δυο ράβδων η μηχανική ενέργεια διατηρείται άρα θα ισχύει: $E^{αρχ}_{μηχ} = E^{τελ}_{μηχ}$ ή $U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ}$ ή $m_2 g\frac{L_1}{2} = m_1 g\frac{L_1}{2} + m_2 g\frac{L_2}{2}$

ή $4m_2 = 1{,}6 + 2m_2$ ή $m_2 = 0{,}8kg$.

β. Για την ροπή αδράνειας της ράβδου ΟΑ ως προς τον άξονα περιστροφής της, εφαρμόζοντας το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων προκύπτει: $I_2 = I_{cm2} + m_2(\frac{L_2}{2})^2$ ή $I_2 = \frac{1}{3}m_2L_2^2$ ή $I_2 = \frac{1}{3}0{,}8 \cdot 0{,}4^2$ ή $I_2 = \frac{0{,}128}{3}kg \cdot m^2$. Αντίστοιχα για την ράβδο ΟΒ : $I_1 = I_{cm1} + m_1(\frac{L_1}{2})^2$ ή $I_1 = \frac{1}{3}m_1L_1^2$ ή $I_1 = \frac{1}{3}0{,}4 \cdot 0{,}8^2$ ή $I_2 = \frac{0{,}256}{3}kg \cdot m^2$. Άρα η ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ράβδων ως προς τον άξονα περιστροφής του θα είναι: $I_{(o)} = I_1 + I_2$ ή $I_{(o)} = \frac{0{,}384}{3}kg \cdot m^2$ ή $I_{(o)} = 0{,}128kg \cdot m^2$

γ. Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης στο σύστημα των δυο ράβδων, ως προς τον άξονα περιστροφής του προκύπτει:



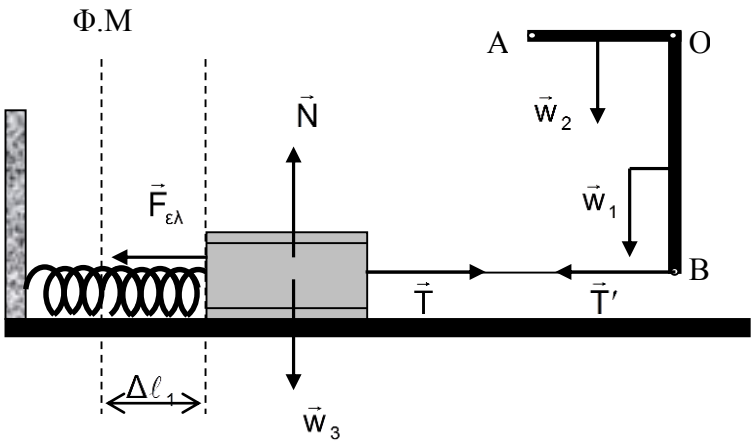
$$\Sigma\tau_{(o)} = I_{(o)}\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή} \quad w_2\frac{L_2}{2} = I_{(o)}\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή}$$

$$m_2 \cdot g \cdot \frac{L_2}{2} = I_{(o)}\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή} \quad 1{,}6 = 0{,}128 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = 12{,}5\frac{rad}{s^2}$$

δ. Για τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στα άκρα του αβαρούς μη εκτατού νήματος ισχύει Τ= Τ΄. Εφόσον το σύστημα των δύο ράβδων ισορροπούσε πριν την κοπή του νήματος θα ισχύει: $\Sigma\tau_{(o)} = 0$ ή $w_2\frac{L_2}{2} - TL_1 = 0$ ή $T = \frac{m_2 \cdot g \cdot L_2}{2 \cdot L_1}$ ή Τ=2Ν.

Για το σώμα μάζας m_3 ισχύει: $\Sigma F_\chi = 0$ ή $T - F_{\varepsilon\lambda} = 0$ ή $F_{\varepsilon\lambda} = 2N$. Αν $\Delta\ell_1$ η παραμόρφωση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος ως τη θέση που το σώμα μάζας m_3 ισορροπούσε πριν την κοπή του νήματος, τότε προκύπτει $F_{\varepsilon\lambda} = k\,\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0{,}1m$. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ που κόβεται το νήμα το σώμα μάζας m_3 ξεκινά την ταλάντωση του με μηδενική ταχύτητα, συνεπώς η θέση από την οποία ξεκινά είναι θέση μέγιστης απομάκρυνσης για την ταλάντωση που θα ακολουθήσει, άρα για το πλάτος της ταλάντωσής του θα ισχύει: $A = \Delta\ell_1 = 0{,}1m$



Άρα τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ η απομάκρυνση του σώματος μάζας m_3 από την θέση ισορροπίας του ήταν x = +A, απ' όπου προκύπτει ότι η αρχική φάση της ταλάντωσης του είναι $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$.

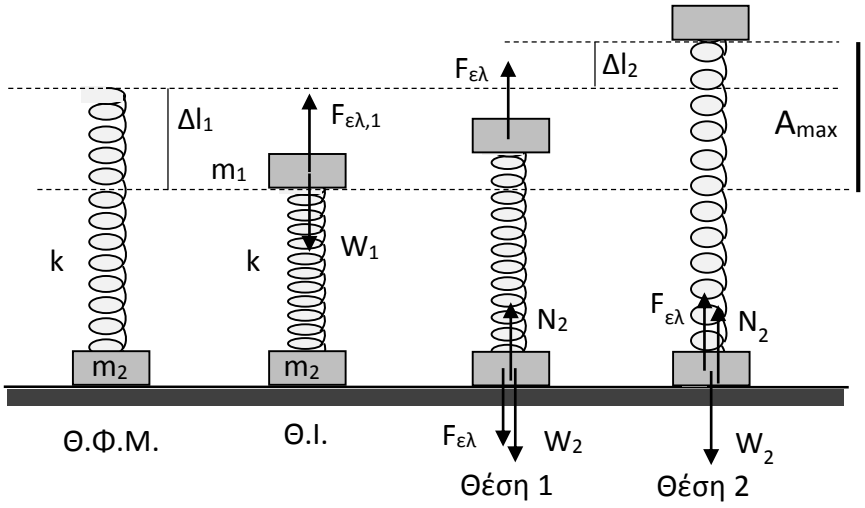
Για την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος ισχύει:

$$k = m \cdot \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{20}{0{,}2}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10\ \frac{rad}{s}$$

Συνεπώς η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από την θέση ισορροπίας του περιγράφεται από την σχέση: $x = 0,1 \cdot ημ(10t + \frac{π}{2})$ (S.I). Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{8}$ η απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας του θα είναι: $x = 0,1 \cdot ημ(\frac{2π}{T}\frac{T}{8} + \frac{π}{2})$ ή $x = 0,1 \cdot ημ(\frac{π}{4} + \frac{π}{2})$ ή $x = 0,1 \cdot ημ(\frac{3π}{4})$ ή $x = 0,1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $x = 0,05\sqrt{2}m$. Η ταχύτητα του σώματος αντίστοιχα θα είναι: $υ = ω \cdot Aσυν(ωt + φ_o)$ ή $υ = 10 \cdot 0,1 \cdot συν(\frac{3π}{4})$ ή $υ = -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $υ = -0,5 \cdot \sqrt{2}\ \frac{m}{s}$. Συνεπώς ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος θα είναι: $\frac{dK}{dt} = ΣF \cdot υ$ ή $\frac{dK}{dt} = -D \cdot x \cdot υ = -k \cdot x \cdot υ$ ή $\frac{dK}{dt} = -20 \cdot 0,05 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,5 \cdot \sqrt{2}$ ή $\frac{dK}{dt} = -1\frac{J}{s}$

ΕΡΩΤΗΣΗ ΚΡΙΣΕΩΣ

Στη Θ.Ι. του $Σ_1$ ισχύει: $ΣF = 0$ => $F_{ελ1} = W_1$ => $k \cdot Δl_1 = m_1 \cdot g$ => $Δl_1 = \frac{m_1 \cdot g}{k}$ (1)



Στη θέση 1: Σε οποιαδήποτε θέση κάτω από τη Θ.Φ.Μ. το ελατήριο είναι συσπειρωμένο. Η δύναμη του ελατηρίου στο σώμα μάζας m_2 είναι προς τα κάτω, άρα αυτό δεν μπορεί να χάσει επαφή.

Στη θέση 2: Το ελατήριο είναι επιμηκυμένο. Για το σώμα μάζας m_2 ισχύει: $ΣF = 0$ => $N_2 + F_{ελ} - W_2 = 0$ => $N_2 + F_{ελ} = m_2 \cdot g$ (2)

Το σώμα μάζας m_2 χάνει επαφή οριακά όταν $N_2 = 0$. Άρα: (2) => $F_{ελ} = m_2 \cdot g$ => $k \cdot Δl_2 = m_2 \cdot g$ => $Δl_2 = \frac{m_2 \cdot g}{k}$. Άρα το μέγιστο πλάτος

είναι στη θέση που υποθέσαμε ότι μόλις που χάνει επαφή. Έτσι: $A_{max} = \Delta l_1 + \Delta l_2 \Rightarrow A_{max} = \frac{m_1 \cdot g}{k} + \frac{m_2 \cdot g}{k} \Rightarrow A_{max} = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$

(Σωστή απάντηση η α)

Από το Φυσικό Τμήμα των Φροντιστηρίων
Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν :
Γ. Μαραγκάκης , Ζ. Μαυρομανωλάκης,
Ν. Μπρίγγος, **Α. Τσιπράς**